UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

16. BAND

QA1
M88
v.16-19

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

16. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Bauer, M., Verschiedene Bemerkungen über die Differente und die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers 1

Bauer, M., Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt 318

Funk, P., Über Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte . 159

Haalmeijer, B. P., Über lineare homogene Punktmengen 92

Hausdorff, F., Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen 163

Hausdorff, F., Momentprobleme für ein endliches Intervall 220

Hecke, E., Über die Lösungen der Riemannschen Funktionalgleichung 301

Jolles, St., Die Bestimmung der Inzidenzen in korrelativen Räumen vermöge der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz 13

Jense, J., Über eine Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren 296

Levi, Fr., Streckenkomplexe auf Flächen 148

Liebmann, H., Bemerkung zu der Arbeit: Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze, diese Zeitschrift **14**, S. 160—168 320

Mathias, M., Über positive Fourier-Integrale 103

Meyer, W. Fr., Über die Darstellung und Zusammensetzung nichteuklidischer Raumbewegungen 126

Perron, O., Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. Zweiter Teil . . . 273

Scheffers, G., Flächen mit geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen 43

Schlechter, E., Untersuchungen über die Konvergenz der limitär-periodischen Jacobi-Ketten beliebiger Ordnung 173

Tamarkine, J., Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires 207

Tamarkine, J., Sur la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires 214

Tietze, H., Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen 308

Weinstein, A., Fundamentalsatz der Tensorrechnung 78

Weyrich, R., Beiträge zur Theorie der Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen 249

van der Woude, W., Über die Staudeschen Kreiselbewegungen 170

Verschiedene Bemerkungen über die Differente und die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers.

Von

Michael Bauer in Budapest.

Erster Abschnitt.

§ 1.

1. Es sei K ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades. Ist $\omega = \omega^{(1)}$ ne Zahl des Körpers, so sollen die übrigen Konjugierten durch $^{(k)}$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ bezeichnet werden. Durchläuft ω die sämtlichen nzen Zahlen, so bildet der größte gemeinschaftliche Teiler von $-\omega^{(k)}$ ein Ideal $\mathfrak{e}_k$ des zu K gehörigen Galoisschen Körpers. Die ifferente $\mathfrak{d}$ des Körpers K wird nach Herrn Hilbert folgendermaßen finiert:

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 \ldots \mathfrak{e}_n,$$

e bildet ein Ideal in K. Wenn man, anstatt der ursprünglichen Dedekind-hen, diese Definition der Körperdifferente zugrunde legt, kann man sehr icht den Dedekindschen Satz beweisen, nach welchem die Differenten er ganzen Zahlen die Körperdifferente als größten gemeinschaftlichen eiler aufweisen. Zum Beweise werden wir schwierigere Begriffe, z. B. den es Führers nicht anwenden. Es ist zu bemerken, daß der Satz aus den usführungen meiner Arbeit[1]) „Über die Differente eines algebraischen ahlkörpers" nicht folgt.

2. Aus der Theorie der Primitivzahlen nach einem Primmodul folgt einfacher Weise: Wenn im Körper K die Zerlegung

$$p = \mathfrak{p}^g \mathfrak{q}, \qquad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1$$

[1]) Mathematische Annalen **83** (1921), S. 74—76. In dieser Arbeit enthält eine wisse Relativdifferente der dort auftretenden Zahl π genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$, e die Körperdifferente.

statthat, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal f-ten Grades bedeutet, dann sind eine ganze Zahl ω des Körpers und ein (mod p) irreduzibles Polynom $P(x)$ f-ten Grades vorhanden, so daß $P(\omega)$ relativ prim gegen $\mathfrak{q}$ ausfällt und genau durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist[2]). Man kann noch voraussetzen, daß ω eine determinierende Zahl von K, ferner eine Primitivzahl (mod $\mathfrak{p}$) bildet. Es sei $F(\omega) = 0$ die determinierende Gleichung. Aus einem Teile des § 11 der Dedekindschen klassischen Abhandlung über Diskriminanten[3]) kann ohne den Begriff des Führers zu benützen, ein Beweis der folgenden Tatsache entnommen werden. Es besteht die Zerlegung

$$F(x) \equiv P^{g}(x) Q(x) \pmod{p}, \tag{2*}$$

wo P und Q (mod p) relativ prime ganzzahlige Polynome sind. Wir werden den Beweis des unter 1. genannten Satzes leisten, indem wir zeigen, daß die Differente der Zahl ω genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ enthält wie die Körperdifferente.

3. Es sei im Galoisschen Körper von K

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{P}_i$ Primideale bedeuten. Bezeichnen wir ein beliebiges unter ihnen durch $\mathfrak{P}$. Die Konjugierten von $\mathfrak{p}$ in K sollen $\mathfrak{p}^{(k)}$ heißen, analog werden die Konjugierten eines beliebigen Ideals oder einer Zahl bezeichnet. Wir werden beweisen, daß die Differenz $\Omega - \Omega^{(k)}$, wo Ω eine beliebige ganze Zahl von K ist, die Potenz von $\mathfrak{P}$, durch welche $\omega - \omega^{(k)}$ teilbar ist, sicher enthält. Damit wird unser Satz bewiesen sein. Zwei Fälle sind denkbar.

α) Das Ideal $\mathfrak{p}^{(k)}$ ist nicht teilbar durch $\mathfrak{P}$. Es ist in diesem Falle

$$P(\omega) = \mathfrak{p}\mathfrak{a}, \quad (\mathfrak{a}, p) = 1,$$

$$P(\omega^{(k)}) = \mathfrak{p}^{(k)}\mathfrak{a}^{(k)}, \quad (\mathfrak{a}^{(k)}, p) = 1, \quad P(\omega^{(k)}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}},$$

infolgedessen

$$P(\omega^{(k)}) \equiv P(\omega^{(k)}) - P(\omega) \equiv (\omega^{(k)f} + a_1\omega^{(k)f-1} + \ldots + a_f)$$
$$- (\omega^f + a_1\omega^{f-1} + \ldots + a_f) \equiv (\omega^{(k)} - \omega)\gamma_k \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Da γ_k eine von ω und k abhängige ganze Zahl ist, wird

$$\omega - \omega^{(k)} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}, \tag{4}$$

mithin rechtfertigt sich unsere Behauptung in diesem Falle.

---

[2]) Vgl. z. B. D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper § 9, Satz 30. Jahresbericht der D. M. Vereinigung 4 (1897).

[3]) Über die Discriminanten endlicher Körper. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 29 (1882).

β) Das Ideal $\mathfrak{p}^{(k)}$ ist durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Bekanntermeise ist für jeden ositiven ganzen rationalen Exponenten t

$$\Omega \equiv R_t(\omega) \pmod{\mathfrak{p}^t},$$

o R_t ein ganzzahliges Polynom seines Argumentes bedeutet. Folglich ird

$$\Omega \equiv R_t(\omega) \pmod{\mathfrak{P}^t}, \qquad \Omega^{(k)} \equiv R_t(\omega^{(k)}) \pmod{\mathfrak{P}^t},$$

oraus

$$\Omega - \Omega^{(k)} \equiv R_t(\omega) - R_t(\omega^{(k)}) \equiv (\omega - \omega^{(k)})\gamma_{kt} \pmod{\mathfrak{P}^t}$$

sfällt, wo γ_{kt} eine von k, t, Ω abhängige ganze Zahl ist. Da ω und $\omega^{(k)}$ erschieden sind, so ist $\omega - \omega^{(k)}$ genau durch eine gewisse Potenz $\mathfrak{P}^u$ teilbar, is (5) ergibt sich nun

$$\Omega - \Omega^{(k)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^u}, \text{ q. e. d.}$$

Bisher wurden nur folgende Tatsachen ausgenützt. $P(x)$ ist $\pmod p$ n irreduzibles Polynom f-ten Grades und die Zahl $P(\omega)$ enthält genau e erste Potenz von $\mathfrak{p}$.)

Aus (2^*) folgt, daß wenn man

$$F(x) = P^g(x)Q(x) + pM(x)$$

tzt, $M(x) \pmod p$ relativ prim gegen $P(x)$ ausfällt. Eine Konsequenz eser Tatsache ist, daß die Körperdifferente für den Fall $(g, p) = 1$ nau $\mathfrak{p}^{g-1}$ enthält. Wenn

$$g = p^s g', \qquad (p, g') = 1$$

und die Differente genau $\mathfrak{p}^{v-1}$ enthält, so hat man, wie dies zuerst n H. Hensel[4]) bewiesen wurde,

$$v \leqq (s+1)g. \qquad (7^*)$$

Schon im § 14 seiner zitierten Abhandlung hat Dedekind die Zahl v r einige spezielle Körper ausgerechnet. Sowohl in diesen Fällen, als in n Untersuchungen des H. Fueter[5]) ist das Gleichheitszeichen in (7^*) für > 0 ausgeschlossen. Dennoch läßt sich beweisen, daß dasselbe für jeden ert von s und des Grades von $\mathfrak{p}$ bei geeignet gewählten Körpern in der

[4]) Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, Mathematische nalen 55 (1902), S. 301–336. Der zweite Abschnitt dieser Arbeit gibt eine wesentche Vereinfachung des Henselschen Beweises.

[5]) Ein Satz über Iteration von Potenzreihen und seine zahlentheoretische wendung, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 62 917), S. 67–72.

Tat auftreten kann. Um den Beweis zu leisten, wenden wir den folgenden Satz an[6]). Das ganzzahlige Polynom

$$F(x) = f^g(x) + p^\alpha M(x)$$

ist $(\mathrm{mod}\ p^{\alpha+1})$ irreduzibel, wenn das ganzzahlige Polynom

$$f(x) = x^r + \ldots + c_r$$

$(\mathrm{mod}\ p)$ irreduzibel ausfällt, ferner $M(x)$ und $f(x)$ $(\mathrm{mod}\ p)$ relativ prim gegeneinander sind, der Grad von $M(x)$ kleiner wie der Grad von $f^g(x)$ ist und endlich die Relation $(g, \alpha) = 1$ besteht. Wenn ω eine Wurzel der irreduziblen Gleichung $F(x) = 0$ bezeichnet, dann sind in dem durch ω erzeugten Körper $p = \mathfrak{p}^g$, $\mathfrak{p}$ ein Primideal r-ten Grades, $\frac{f^g(\omega)}{p^\alpha}$ eine ganze Zahl und $\left(\frac{f^g(\omega)}{p^\alpha}, p\right) = 1$.

Wählen wir $\alpha = 1$, so ist $f(\omega)$ genau durch $\mathfrak{p}$ teilbar und so enthält die Differente von ω, mithin die Zahl $F'(\omega)$ nach 3. genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ wie die Körperdifferente[7]). Wird z. B.

$$M(x) \equiv m \ (\mathrm{mod}\ p^s)$$

gesetzt, wo m eine gegen p relativ prime rationale ganze Zahl bedeutet, dann ist $F'(\omega)$ in der Tat genau durch $\mathfrak{p}^{gs+g-1}$ teilbar, wie es zu beweisen war. Für Galoissche Körper verhält sich die Sache anders. Ist nämlich sg nicht teilbar durch $p-1$, so fällt immer, wie wir zeigen werden,

$$(7^{**}) \qquad v < (s+1)g$$

aus. Bekannterweise ist die Ordnung der Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}$ gleich g. Die Substitionen T der Gruppe erfüllen die Relation

$$T\Omega \equiv \Omega \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}),$$

---

[6]) Verallgemeinerung eines Satzes von Schönemann, Journal für Mathematik 128 (1905), S. 87–89.

[7]) Aus der Relation $M(x) \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p, f)$ beweist Dedekind ohne Anwendung der Idealtheorie, daß die Diskriminante von ω dieselbe Potenz von p enthält wie die Körperdiskriminante. (Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale usw. Abhandl. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 23 (1878), Satz III.) Aus den Bisherigen folgt, daß wenn p in einem Körper eine Primidealpotenz bildet, so ist immer eine determinierende Gleichung $F(\omega) = 0$ vorhanden, deren linke Seite die Gestalt

$$F(x) = f^g(x) + pM(x), \qquad M \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p, f)$$

besitzt und in welcher $f(x)$ $(\mathrm{mod}\ p)$ irreduzibel ausfällt. Infolgedessen enthalten die Norm der Differente und die Diskriminante die gleiche Potenz von p. Das ist ein einfach bewiesener Teil des allgemein gültigen Satzes (§ 2, 1).

vo Ω eine beliebige ganze Zahl des Körpers bedeutet. Die Verzweigungs-
ruppe $\mathfrak{V}$ bildet eine Untergruppe der Trägheitsgruppe von der Ordnung
^{s}, ihre Substitutionen V erfüllen die Relation

$$V\Omega \equiv \Omega \pmod{\mathfrak{p}^2}.$$

Es seien $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^{\overline{1}}, \mathfrak{V}^{\overline{2}}, \ldots, \mathfrak{V}^{\overline{h+1}} = E$ die verschiedenen Verzweigungs-
ruppen, ihre Substitutionen $V^{\overline{i}}$ sind folgendermaßen definiert. Zu jedem
ndex i $(i \leqq h)$ existiert eine größte mit i monoton wachsende positive
ationale ganze Zahl $\alpha_i + 1$, daß für jede Ω

$$V^{\overline{i}}\Omega \equiv \Omega \pmod{\mathfrak{p}^{\alpha_i+1}}$$

usfällt. (Die Zahlen α_i, welche zu den von H. Hilbert eingeführten Ver-
weigungsgruppen gehören, wurden von H. Speiser[8]) näher untersucht.)
Die Ordnunngen der verschiedenen Verzweigungsgruppen sind

$$p^s = p^{\beta_1} > p^{\beta_2} > \ldots > p^{\beta_h} > p^{\beta_{h+1}} = 1.$$

Man bekommt demnach für die Zahl v die Relation

$$= g - p^s + (p^s - p^{\beta_2})(\alpha_1 + 1) + (p^{\beta_2} - p^{\beta_3})(\alpha_2 + 1) + \ldots + (p^{\beta_h} - 1)(\alpha_h + 1),$$

voraus

$$v - 1 = g - p^s + (p-1)e$$

olgt, wo e eine ganze rationale Zahl ist. Aus (7^*) wird

$$g - p^s + (p-1)e \leqq (s+1)g - 1$$

8) $$(p-1)e \leqq sg + p^s - 1.$$

Würde in (7^*) und so auch in (8) das Gleichheitszeichen gelten, wäre

$$sg \equiv 0 \pmod{(p-1)},$$

gemäß unserer Behauptung.

§ 2.

1. Es besteht der fundamentale Satz: Die Norm der Körperdifferente
st äquivalent mit der Körperdiskriminante. Der Beweis des Satzes liegt
ief, auch dann, wenn die Hilbertsche Definition der Differente zugrunde
gelegt wird. Der Dedekindsche Satz über die Diskriminante sagt folgendas
aus. Ist

1) $$p = \mathfrak{p}_1^{g_1}\mathfrak{p}_2^{g_2}\ldots\mathfrak{p}_k^{g_k},$$

vo $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideale f_i-ten Grades bezeichnen und fällt

1*) $$(g_i, p) = 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

aus, dann ist die Diskriminante genau durch $p^{(g_1-1)f_1 + \cdots + (g_k-1)f_k}$ teilbar.

[8]) Die Zerlegungsgruppe, Journal für Mathematik 149 (1919), S. 174–188.

2. In dem Folgenden wird gezeigt, daß aus den Abhandlungen von Dedekind und aus gewissen älteren Untersuchungen von H. Hensel eine solche Beweisanordnung für den Dedekindschen Satz gegeben werden kann, welche einerseits den Satz über die Norm der Differente nicht vollständig ausnützt, andererseits sowohl die schwierigeren Dedekindschen Begriffe (z. B. den Begriff des Führers), als auch die Begriffe, welche in H. Hensels neueren Untersuchungen[9]) auftreten, nicht anwendet. Zunächst folgt aus (1)

$$(2) \qquad p = \mathfrak{p}_i^{g_i} \mathfrak{q}_i, \qquad (\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i) = 1, \qquad (g_i, p) = 1.$$

Im Sinne der Relation (2^*) des § 1 existieren solche determinierende Zahlen ω_i, daß die linken Seiten der zugehörigen irreduziblen Gleichungen $F_i(\omega_i) = 0$ die Kongruenzen

$$(2^*) \qquad F_i(x) \equiv P_i^{g_i}(x) Q_i(x) \pmod{p}$$

erfüllen, wo $P_i(x), Q_i(x) \pmod{p}$ relativ prim gegeneinander ausfallen und die Zahl $P_i(\omega_i)$ relativ prim gegen $\mathfrak{q}_i$ ist und genau die erste Potenz von $\mathfrak{p}_i$ enthält. Infolgedessen werden in der Gleichung

$$F_i(x) = P_i^{g_i}(x) Q_i(x) + p M_i(x)$$

die Polynome $M_i(x), P_i(x) \pmod{p}$ relativ prim gegeneinander und so enthält die Differente der Zahl ω_i, mithin die Körperdifferente höchstens die Potenz $\mathfrak{p}_i^{g_i - 1}$. (Hier wenden wir den im Punkte 3 des § 1 bewiesenen Satz nicht an.) Aus der Determinantentheorie und aus dem Satze, nach welchem der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten eines Produkts von Polynomen, wenn die Koeffizienten ganze Zahlen von K sind, äquivalent dem Produkte der größten gemeinsamen Teiler der einzelnen Faktoren ist, folgt, daß die Norm der Körperdifferente ein Vielfaches der Diskriminante bildet[10]).

Folglich enthält für den Fall $(g_i, p) = 1$ die Körperdiskriminante höchstens die Potenz $p^{(g_1 - 1) f_1 + \ldots + (g_k - 1) f_k}$.

3. Bedeutet ϱ_i eine Primitivzahl $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_i)$, welche durch $\mathfrak{q}_i$ teilbar ist, und enthält die ganze Zahl π_i genau $\mathfrak{p}_i$,[11]) so bilden die Zahlen

$$(3) \qquad \pi_i^{a_i} \varrho_i^{b_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ a_i = 0, 1, 2, \ldots, g_i - 1;\ b_i = 1, 2, \ldots, f_i)$$

---

[9]) a. a. O. [4]).

[10]) D. Hilbert, a. a. O. [2]). Vgl. das Ende des § 32 und den Satz 13, sowie den Anfang des Beweises von Satz 35. Die Schwierigkeit liegt im Beweise der Umkehrung, d. h. im Beweise der Tatsache, daß die Diskriminante durch die Norm der Differente teilbar ist. Ein Teil des Satzes wird durch die obigen Untersuchungen mitbewiesen.

[11]) Man kann z. B. $\varrho_i = \omega_i$, $\pi_i = P_i(\omega_i)$ setzen.

n Fundamentalsystem $(\mathrm{mod}\, p)$. Das System ist eine Modifikation des ystems, welches H. Hensel[12]) benützt, um die Existenz der sogenannten ormalen Fundamentalsysteme zu begründen. (Wir hätten auch an dem ystem von H. Hensel festhalten können.) Die Zahlen $\pi_i^{a_i} \varrho_i^{b_i}$ und ihre onjugierten sind durch $p^{\frac{a_i}{g_i}}$ teilbar, weil die Zahlen $\pi_i^{a_i g_i} \varrho_i^{b_i g_i}$ durch p^{a_i} ilbar sind. Bildet man die zweite Potenz der Determinante n-ten Grades, elche aus (3) und den Konjugierten besteht, so erhält man, daß die-lbe, mithin die Körperdiskriminante, mindestens die Potenz

$$p^{\sum_{i=1}^{k} \sum_{a_i=0}^{g_i-1} 2 \frac{a_i}{g_i} f_i} = p^{\sum_{i=1}^{k} (g_i-1) f_i} \qquad (3^*)$$

nthält. Folglich ist für den Fall $(g_i, p) = 1$ die Körperdiskriminante enau durch die Größe (3*) teilbar, was zu beweisen war.

Zweiter Abschnitt.

§ 3.

1. Wie schon erwähnt wurde, hat H. Hensel zuerst die folgende atsache a. a. O. bewiesen. Ist in einem Körper n-ten Grades K

$$p = \mathfrak{p}^e \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1, \quad g = p^s g', \quad (p, g') = 1, \qquad (1)$$

o $\mathfrak{p}$ ein Primideal f-ten Grades bedeutet, und enthält die Körperdifferente enau $\mathfrak{p}^{v-1}$, so hat man

$$v \leqq (s+1) g. \qquad (1^*)$$

Diese Formel läßt sich auch durch solche Methoden beweisen, welche on den Henselschen verschieden sind und nur im Galoisschen Körper on K operieren[13]). In dem Folgenden möchte ich, an den Grundgedanken es Henselschen Beweises festhaltend, denselben durch einige Kunstgriffe ereinfachen. Zunächst wird gezeigt, daß man sich auf solche Körper eschränken kann, in welchen die Primzahl p eine Primidealpotenz ist.

2. Bekanntlich existiert in K eine determinierende ganze Zahl ω, elche die irreduzible Gleichung $F(\omega) = 0$ erfüllt, mit folgenden Eigen-haften. Die Zahl ω ist teilbar durch $\mathfrak{q}$, Primitivzahl $(\mathrm{mod}\, \mathfrak{p})$, und es esteht die Relation

$$F(x) = P^g(x)\, Q(x) + p\, M(x), \qquad (2)$$

---

[12]) Über Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen ntstehen, Journal für Mathematik **105** (1889), S. 329–344.

[13]) Vgl. Fußnote [1]). Die Methoden lassen sich auf Relativkörper ausdehnen.

wo die Polynome P, Q bzw. $P, M \pmod p$ relativ prim gegeneinander sind, der Grad von $M(x)$ ist kleiner als der Grad von $F(x)$, $P(x)$ ist ein irreduzibles Polynom f-ten Grades, $P(\omega)$ ist relativ prim gegen $\mathfrak{p}$ und enthält genau $\mathfrak{p}$. Es wurde (§ 1, 3.) bewiesen, daß die Zahl $F'(\omega)$ genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$ enthält wie die Körperdifferente [14]). Aus der Tatsache $M(x) \not\equiv 0 \pmod{p, P}$ folgt, wie ich schon vor längerer Zeit bewiesen habe [15]), für jede rationale ganze Zahl $t > 1$ die Gleichung

$$F(x) = S_{1t}(x)\, S_{2t}(x) + p^t M_t(x), \tag{3}$$

wo

$$S_{1t}(x) \equiv P^g(x) \pmod p, \quad S_{2t}(x) \equiv Q(x) \pmod p \tag{3*}$$

ausfallen und $S_{1t}(x)$ schon $(\mathrm{mod}\, p^2)$ irreduzibel ist. Infolgedessen wird

$$S_{1t}(x) = P^g(x) + p G_{1t}(x) \tag{4}$$

und

$$G_{1t}(x) \not\equiv 0 \pmod{p, P}. \tag{4*}$$

Bezeichnen wir durch k_t den Körper, welcher durch eine fix gegebene Wurzel von

$$S_{1t}(x) = 0 \tag{5}$$

bestimmt wird, so ergibt sich aus einem schon erwähnten Satze $p = \mathfrak{P}^g$, wo das Primideal vom Grade f ist. Da $P, Q \pmod p$ relativ prim sind, folgt aus (3)

$$S_{1t}(\omega) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^t}, \quad S_{2t}(\omega) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Aus

$$F'(x) = S_{1t}(x)\, S'_{2t}(x) + S'_{1t}(x)\, S_{2t}(x) + p^t M'_t(x)$$

erhält man, daß für genügend große Werte von t die Zahlen $F'(\omega)$, $S'_{1t}(\omega)$ die gleiche Potenz von $\mathfrak{p}$ enthalten.

---

[14]) Will man nur (1*) beweisen, so genügt die Bemerkung, daß $F'(\omega)$ durch die Körperdifferente teilbar ist.

[15]) Zur Theorie der höheren Kongruenzen, Math. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn 20 (1902), erschienen 1905, S. 39. Der Beweis ist der folgende. Zunächst ist nach Schönemann jedes $(\mathrm{mod}\, p^t)$ irreduzible Polynom, dessen höchster Koeffizient gleich Eins ist, die Potenz eines $(\mathrm{mod}\, p)$ irreduziblen Polynoms. Wäre (3*) nicht richtig, so würden Relationen von der Gestalt

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1 > 0, \quad g_2 > 0,$$
$$F(x) \equiv (P^{g_1}\varphi + pH)(P^{g_2}\psi + pK) \pmod{p^t}, \quad F \equiv 0 \pmod{p^2, P}$$

bestehen, was der Prämisse $M(x) \not\equiv 0 \pmod{p, P}$ widerspricht. Vgl. noch: Zur Theorie der Fundamentalgleichung, Journal für Mathematik 149 (1919), S 89—96.

3. Es sei nun t genügend groß gewählt und man bekomme bei einer eigneten Wahl

) $$S_{1t}(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_{fg}).$$

enn der Galoissche Körper G die Körper K, k_t nebst den Konjugierten thält, dann wird in G, da die Relationen $p = \mathfrak{p}^g\mathfrak{q} = \mathfrak{P}^g$, $(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = 1$ stehen:

) $$\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}^e\dots, \qquad \mathfrak{P} = \bar{\mathfrak{p}}^e\dots,$$

$\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal bedeutet. Aus

$$S_{1t}(\omega) = (\omega-\gamma_1)(\omega-\gamma_2)\dots(\omega-\gamma_{fg}) \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{p}}^t}$$

lgt, daß die Zahl ω nach einem gewissen $(\mathrm{mod}\,\bar{\mathfrak{p}}^{\bar{t}})$ mit einer der ahlen γ, z. B. $\gamma = \gamma_1$ kongruent ist, wo

) $$fg\bar{t} \geqq t, \qquad \bar{t} \geqq \frac{t}{fg}$$

sfällt. Es wird daher

) $$S'_{1t}(\omega) \equiv S'_{1t}(\gamma) \pmod{\bar{\mathfrak{p}}^{\bar{t}}}.$$

a nach (8) der Exponent $\bar{t}$ beliebig groß gewählt werden kann, ent-lten die beiden Seiten von (9) die gleiche Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$; infolgedessen ben nach (7) einerseits die in den Zahlen $S'_{1t}(\omega)$, $F'(\omega)$ enthaltenen otenzen von $\mathfrak{p}$ und andererseits die in $S'_{1t}(\gamma)$ enthaltene Potenz von $\mathfrak{P}$ n gleichen Exponenten. Aus (4*) erhellt, daß $S'_{1t}(\gamma)$ genau dieselbe otenz von $\mathfrak{P}$ enthält wie die Körperdifferente von k_t. Also ist unsere ehauptung bewiesen.

§ 4.

1. Es kann daher vorausgesetzt werden, daß im Körper n-ten ades K, welcher durch die Wurzel ω der irreduziblen Gleichung $F(\omega) = 0$ zeugt wird, $p = \mathfrak{p}^g$ ausfällt, wo das Pri..ideal $\mathfrak{p}$ vom Grade f ist, also $= fg$ wird. Aus der Existenz einer Primitivzahl $(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p})$ folgt in be-nnter Weise das Vorhandensein zweier ganzen Zahlen ϱ, π des Körpers K, rch deren Vermittelung jede ganze Zahl Ω in eindeutiger Weise in r Form

) $$\Omega \equiv A_m\pi^m + \dots + A_{t-1}\pi^{t-1} \pmod{\mathfrak{p}^t} \qquad (m \geqq 0)$$

rstellbar wird. Es ist

) $$A_i = a_{0i} + a_{1i}\varrho + \dots + a_{f-1\,i}\varrho^{f-1},$$

die Koeffizienten a_{ki} Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \dots, p-1$ be-uten. Über die mögliche Wahl der Zahlen ϱ und π benützen wir nur e einfachsten Henselschen Sätze.

I. Die Zahl ϱ erfüllt eine Kongruenz

$$(I) \qquad P(x) = x^f + b_1 x^{f-1} + \ldots + b_f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^t},$$

deren linke Seite $(\mathrm{mod}\, p)$ irreduzibel ist. Die Koeffizienten b_i sind von t unabhängige ganze rationale Zahlen.

II. Die Zahl π genügt einer Kongruenz

$$(II) \qquad \pi(x) = x^g + pC_1 x^{g-1} + \ldots + pC_g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^t},$$

wo $C_j = c_{0j} + c_{1j}\varrho + \ldots + c_{f-1\,j}\varrho^{f-1}$ ist, in dieser Formel sind c_{kj} von t abhängige ganze rationale Zahlen. Die Zahl C_g ist relativ prim gegen $\mathfrak{p}$, folglich auch gegen p.

2. Wenn man, wie früher, die Konjugierten durch obere Indexe bezeichnet, dann erhält man:

$$(1^*) \qquad \Omega^{(i)} \equiv A_m^{(i)} \pi^{(i)m} + \ldots + A_{t-1}^{(i)} \pi^{(i)t-1} \pmod{\mathfrak{p}^{(i)t}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Nachdem $p = \mathfrak{p}^{(i)g}$ ist, bestehen im Galoisschen Körper G des Körpers K die Relationen

$$(1^{**}) \qquad \Omega^{(i)} \equiv A_m^{(i)} \pi^{(i)m} + \ldots + A_{t-1}^{(i)} \pi^{(i)t-1} \pmod{\mathfrak{P}^t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Primideal von p im Körper G bezeichnet. Ferner erfüllen die Zahlen $\varrho^{(i)}$ bzw. $\pi^{(i)}$ die Kongruenzen

$$(I^*) \qquad P(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^t}$$

bzw.

$$(II^*) \qquad \pi^{(i)}(x) = x^g + pC_1^{(i)} x^{g-1} + \ldots + pC_g^{(i)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^t}.$$

Neben den Kongruenzen sollen auch Gleichungen eingeführt werden. Zunächst die irreduzible Gleichung

$$(2) \qquad P(x) = 0,$$

ihre Wurzeln sollen durch $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_f$ bezeichnet werden. (Hier benützen wir keine oberen Indexe.) Nun sollen auch die Gleichungen

$$(3) \qquad \pi(x; \gamma_l) = x^g + D_1^{(l)} x^{g-1} + \ldots + pD_g^{(l)} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

$$D_j^{(l)} = c_{0j} + c_{1j}\gamma_l + \ldots + c_{f-1\,j}\gamma_l^{f-1}$$

betrachtet werden. Aus den Prämissen über P schließt man in bekannter Weise, daß $(D_g^{(l)}, p) = 1$ ist und folglich die Gleichungen (3) im Bereiche ihrer Koeffizienten irreduzibel sind. Wenn man die Wurzeln von (3) durch $\sigma_{l1}, \sigma_{l2}, \ldots, \sigma_{lg}$ bezeichnet, dann sind die Körper $k_l^{(j)}$, welche durch die Zahlen γ_l und σ_{lj} erzeugt werden, vom Grade $n = fg$; sie sind alle zueinander konjugiert (auf die Bezeichnung ist zu achten) und in jedem zerfällt p in die g-te Potenz eines Primideals vom Grade f. Es sei z. B. in $k_1^{(1)}$, $p = \bar{\mathfrak{p}}^g$. Unser Ziel ist, die genaue Potenz von $\mathfrak{p}$ in der Differente von $K = K^{(1)}$ zu bestimmen.

3. Die Gesamtheit der Körper $k_i^{(j)}$ erzeugt einen Galoisschen Körper G_1, s G_1 und G entstehe durch Zusammensetzung der Galoissche Körper $\bar{G}$. : $\overline{\mathfrak{P}}$ ein beliebiges Primideal von $\mathfrak{P}$ im Körper $\bar{G}$, dann ist ein Exponent $\bar{t}$ rhanden, daß bei geeigneter Bezeichnung die Relationen bestehen:

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho^{(eg+1)} \equiv \varrho^{(eg+2)} \equiv \ldots \equiv \varrho^{((e+1)g)} \equiv \gamma_{e+1} \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{t}}), \\ \pi^{(eg+1)} \equiv \sigma_{e+11}, \ldots, \pi^{((e+1)g)} \equiv \sigma_{e+1\,g} \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{t}}), \\ \qquad\qquad f g \bar{t} \geqq t \qquad\qquad (e = 0, 1, 2, \ldots, f-1). \end{array}\right.$$

Die Zahlen $\varrho^{(i)}$ erfüllen nämlich die Kongruenz

$$P(x) = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \ldots (x - \gamma_f) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{t}}),$$

glich existiert ein Exponent $\bar{\bar{t}} \geqq \frac{t}{f}$, daß $\varrho^{(i)}$ mit einer gewissen γ, B. $\gamma_l \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{\bar{t}}})$ kongruent ausfällt, d. h.

$$\varrho^{(i)} \equiv \gamma_l \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{\bar{t}}}), \quad \bar{\bar{t}} f \geqq t$$

. Die Zahl $\pi^{(i)}$ befriedigt die Kongruenz $\pi(x; \gamma_l) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{\bar{t}}})$, also ein solcher Exponent $\bar{t} \geqq \frac{\bar{\bar{t}}}{g}$ vorhanden, daß $\pi^{(i)}$ mit einer gewissen $(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{t}})$ kongruent ausfällt, d. h.

$$\pi^{(i)} \equiv \sigma_{lj} \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{t}}), \quad g\bar{t} \geqq \bar{\bar{t}}, \quad fg\bar{t} \geqq t, \tag{4*}$$

$$\varrho^{(i)} \equiv \gamma_l \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{t}}) \tag{4**}$$

d. Die Relationen (R) sind richtig, wenn (4*) und (4**) nicht beide stehen bleiben, falls auf der linken Seite der Index i durch einen deren J vertauscht wird. Das ist aber in der Tat so, denn im entgengesetzten Falle würde sich $\Omega^{(i)} \equiv \Omega^{(J)} \,(\mathrm{mod}\, \overline{\mathfrak{P}}^{\bar{t}})$ für die konjugierten hlen der Körper $K^{(i)}$, $K^{(J)}$ ergeben, folglich wäre die Diskriminante der eichung $F(x) = 0$, welche eine bestimmte Potenz von p enthält, durch ^{t} teilbar. Da der Körper $\bar{G}$ durch Zusammensetzung der Galoisschen örper zweier Körper n-ten Grades entsteht und andererseits $\bar{t}$ beliebig oß angenommen werden kann, ist das unmöglich.

4. Ist $\mathfrak{d}$ die Differente von $K = K^{(1)}$, so hat man, wie im § 1,

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 \ldots \mathfrak{e}_n.$$

Nun sind die Ideale $\mathfrak{e}_i$, $i > g$ nach (R) relativ prim gegen $\overline{\mathfrak{P}}$, weil $- \gamma_j$, $j \neq 1$ relativ prim gegen p ausfällt. Es folgt aus (R) und (1**), ß die Differente von $K = K^{(1)}$ genau dieselbe Potenz von $\overline{\mathfrak{P}}$ enthält e die Zahl $\pi'(\sigma_{11}; \gamma_1)$. Nachdem $\mathfrak{p}$ bzw. $\bar{\mathfrak{p}}$ durch dieselbe Potenz von

$\bar{\mathfrak{P}}$ teilbar ist, enthält die Differente von $K = K^{(1)}$ genau dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}$, welche Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$ in der genannten Zahl

$$(6) \qquad \pi'(\sigma_{11}; \gamma_1) = g\sigma_{11}^{g-1} + pD_1^{(1)}(g-1)\sigma_{11}^{g-2} + \ldots + pD_g^{(1)}$$

$$D_j^{(1)} = c_{0j} + c_{1j}\gamma_1 + \ldots + c_{f-1\,j}\gamma_1^{f-1} \qquad (c_{kj} \text{ rat. ganz}$$

enthalten ist. Da σ_{11} genau durch $\bar{\mathfrak{p}}$ und die Zahlen $D_j^{(1)}$ infolge der Irreduzibilität von $P(x) \pmod p$ durch Potenzen von $p = \bar{\mathfrak{p}}^g$ teilbar sind, enthalten die Glieder der Summe (6) voneinander verschiedene größte Potenzen von $\bar{\mathfrak{p}}$. Der zu bestimmende Exponent $v-1$ ist die kleinste der Ordnungen, welche die Glieder von (6) in bezug auf $\bar{\mathfrak{p}}$ besitzen. Das erste Glied enthält genau $\bar{\mathfrak{p}}^{gs+g-1}$, es wird also

$$v - 1 \leqq gs + g - 1, \qquad v \leqq (s+1)g,$$

womit der Satz bewiesen ist[16]).

---

[16]) Für den speziellen Fall $f = 1$ kann der Beweis direkt an § 3 anknüpfen. Wir wollen noch bemerken, daß nach den Ausführungen des § 3 der Beweis der Formel $r \leqq (s+1)g$ äquivalent mit dem folgenden Satze ist, dessen Wortlaut keinen Gebrauch von Idealen macht. Wenn $f(x) \pmod p$ ein irreduzibles Polynom f-ten Grades ist, $f(x)$, $M(x) \pmod p$ relativ prim gegeneinander ausfallen und der Grad von $M(x)$ kleiner als der Grad von $f^g(x)$ ist, dann enthält die Diskriminante von

$$F(x) = f^g(x) + pM(x)$$

genau die Potenz $p^{(v-1)f}$, wo die positive rationale ganze Zahl v der Ungleichung $v \leqq (s+1)g$ genügt.

(Eingegangen am 22. Juni 1921.)

Die Bestimmung der Inzidenzen in zwei korrelativen Räumen vermöge der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Die kürzlich entwickelte Theorie der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz gestattet, die Theorie des Büschels kollinearer Räume weiter auszubauen. Insbesondere führt sie auf den speziellen zwei „partiell involutorische" Räume Σ, Σ_i enthaltenden Büschel kollinearer Räume. Dieser spezielle Büschel ist hyperbolisch involutorisch gepaart, sobald je zwei in ihm enthaltene zu seinem Grundraume „partiell inverse" Räume einander zugeordnet werden. Als die Doppelräume ergeben sich dabei der zu Σ identisch involutorische Raum Σ_0 und der zu Σ partiell involutorische Raum Σ_i. Je zwei Räume des speziellen Büschels erzeugen denselben speziellen tetraedralen Strahlenkomplex Γ_i^2. Das F^2-System und das Φ^2-Gewebe dieses tetraedralen Komplexes haben ∞^2 Paare von Regelflächen zweiten Grades gemein.

Eng verknüpft mit der Theorie der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz sind, wie schon gezeigt wurde, die Realitätsbedingungen für das Decktetraeder zweier kollinearen Räume. Nunmehr entwickeln wir, gestützt auf diese Theorie, auch die Realitätsbedingungen für das sich selbst entsprechende Tetraeder zweier korrelativen Räume. Es gibt nämlich nur eine Korrelation ψ_1, die eine gegebene windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe läßt und einem gegebenen Punkte eine gegebene Ebene zuweist. Daraus und aus bekannten Eigenschaften der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz ergeben sich für jeden möglichen Fall die Realitätsbedingungen.

Die Untersuchung der Realitätsbedingungen für das sich selbst entsprechende Tetraeder zweier durch eine Korrelation ψ_1 aufeinander be-

zogenen Räume Σ, Σ_1 führt zur Untersuchung der Eigenschaften des Büschels kollinearer Räume $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$, der den Raum Σ_1 mit dem durch die Kollineation ψ_1^{-2} auf Σ_1 und durch die Korrelation ψ_1^{-1} auf Σ bezogenen Raum Σ_{-1} verbindet. Der Büschel $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ ist speziell, er enthält zwei zueinander partiell involutorische Räume $\bar{\Sigma}$, Σ_i, und seine übrigen Räume sind paarweise zu $\bar{\Sigma}$ partiell invers. Je zwei der zu $\bar{\Sigma}$ partiell inversen Räume von $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ sind zu Σ invers korrelativ. Der zu $\bar{\Sigma}$ identisch involutorische Raum Σ_0 des Büschels bestimmt mit Σ einen Nullraum N_0, der im Büschel enthaltene zu Σ partiell involutorische Raum Σ_i einen polaren Raum Π_i. Die Strahlen des linearen Komplexes Γ_0 von N_0 tragen Punktreihen, die als Gebilde von Σ zu den Ebenenbüscheln involutorisch liegen, die ihnen in den zu Σ korrelativen Räumen des Büschels $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ entsprechen. Auf jedem Strahle von Γ_0 ergibt sich die nämliche Punktinvolution, gleichgültig welcher der zu Σ korrelativen Räume auch gewählt werden mag. Alle diese Punktinvolutionen liegen im polaren Raume Π_i. Sie bilden das gemeinsame „Wechselpunktsystem“ $[\Sigma\Sigma_1]^3$ von Σ und jedem zu Σ korrelativen Raume des Büschels $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$. Außerdem liegt die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in Π_i und die Kongruenz C_1^1 selbst im Komplexe Γ_0. Die (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche des polaren Raumes Π_i ist die gemeinsame Punktinzidenzfläche und Π_i der gemeinsame „polare Punktinzidenzraum“ von Σ und jedem zu Σ korrelativen Raume von $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$.

∞^2 Räume Σ_1 lassen sich auf einen Raum Σ korrelativ so beziehen, daß das Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ von Σ und je einem Raume Σ_1 aus den Paaren konjugierter Punkte eines polaren Raumes Ψ besteht, die auf den Strahlen einer windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz von Ψ liegen. Die ∞^2 kollinearen Räume Σ_1 bilden einen Bündel. Er wird „perspektiv involutorisch“, sobald je zwei zu Σ invers korrelative Räume einander zugeordnet werden. Sein „Involutionsraum“ ist der polare Raum Ψ. Seine übrigen Doppelräume bilden einen Büschel, und jeder von ihnen ist zu Σ nullkorrelativ.

Dem speziellen Büschel kollinearer Räume $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$, der den Raum Σ_1 mit dem durch die Kollineation ψ_1^{-2} auf Σ_1 und durch die Korrelation ψ_1^{-1} auf Σ bezogenen Raum Σ_{-1} verbindet, steht die Σ_1, Σ_{-1} verbindende spezielle Schar kollinearer Räume dual gegenüber. Sie enthält ebenfalls zwei zueinander partiell involutorische Räume $\bar{\Sigma}'$, Σ_J, und ihre Räume sind paarweise zu Σ invers korrelativ und zu $\bar{\Sigma}'$ partiell invers. Der zu $\bar{\Sigma}'$ identisch involutorische Raum Σ_0 bestimmt wiederum mit Σ einen Nullraum N_0' und der partiell involutorische Raum Σ_J einen polaren Raum Π_J. Die Strahlen des linearen Komplexes Γ_0' von N_0' tragen Ebenenbüschel, die als Gebilde von Σ zu den Punktreihen involutorisch liegen,

die ihnen in den zu Σ korrelativen Räumen der Schar $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ entsprechen. Diese Ebeneninvolutionen bilden das gemeinsame „Wechselebenensystem" $[\Sigma\Sigma_1]^{III}$ von Σ und jedem zu Σ korrelativen Raume der Schar $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$. Die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ liegt in Π_J und ihr Träger C_1^1 in Γ_0'. Die (reelle oder imaginäre) Inzidenzfläche von Π_J ist die gemeinsame Ebeneninzidenzfläche und Π_J der gemeinsame „polare Ebeneninzidenzraum" von Σ und jedem zu Σ korrelativen Raume von $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ usf.

Der polare Punktinzidenzraum Π_i wird durch ψ_1 und ψ_1^{-1} in den polaren Ebeneninzidenzraum Π_J übergeführt. Je zwei Wechselpunkte von Σ, Σ_1 bestimmen zwei Paare zu ihnen perspektiver Wechselebenen dieser korrelativen Räume. Eine kurze Besprechung der vier Lagen, die Π_i und Π_J zueinander haben können, bildet den Schluß der Arbeit.

Bekanntlich hat Schröter, fußend auf den Entwicklungen von Seydewitz über die Inzidenzen in zwei kollokalen korrelativen Feldern, die Theorie der Inzidenzen in zwei korrelativen Räumen systematisch entwickelt; diese Untersuchungen hat dann insbesondere R. Sturm weiter ausgebaut. Schröter hat nur zwei korrelative Räume mit reellem, sich selbst entsprechendem Tetraeder behandelt. Die Realitätsbedingungen für das sich selbst entsprechende Tetraeder zweier korrelativen Räume sind später von R. Sturm im dritten Bande seiner geometrischen Verwandtschaften, Nr. 563, aufgestellt worden. Seine Beweise sind lückenhaft; außerdem werden für reelle Elemente bewiesene Sätze ohne weiteres auch als bewiesen angesehen, wenn von den zugrunde liegenden Bestimmungsstücken diese oder jene im Laufe der Untersuchung sich als imaginär erweisen oder als imaginär vorausgesetzt werden.

§ 1.

Allgemeine und spezielle Büschel kollinearer Räume.

1. Es gibt nur eine Kollineation φ_1, die eine gegebene windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, dabei deren Doppelstrahlen — gleichgültig ob sie reell oder paarweise konjugiert imaginär sind — in Ruhe läßt und zwei gegebene Ebenen π, π_1 einander zuweist. Je nachdem die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i ss_i)$ hyperbolisch erster, zweiter oder dritter Art oder elliptisch ist, haben die durch die Kollineation φ_1 aufeinander bezogenen Räume Σ, Σ_1 bzw. ein hyperbolisches Tetraeder erster, zweiter oder dritter Art, oder ein elliptisches Tetraeder zum Decktetrader[1]). Ein

[1]) Jolles, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen. Math. Zeitschr. **13** (1922), Nr. 20.

Paar Gegenkanten des Decktetraeders sind die beiden Leitgeraden u, v seine zwei übrigen Paare die Doppelstrahlen der windschief involutorischen Kongruenz $C_1^1\,(aa_i, ss_i)$[2]). Die kollinearen Räume Σ, Σ_1 erzeugen einen tetraedralen Strahlenkomplex Γ^2, dessen Haupttetraeder mit ihrem Decktetraeder zusammenfällt. Der Komplex Γ^2 ist bestimmt durch sein Haupttetraeder und einen zu seinen Kanten windschiefen Komplexstrahl $\mathfrak{p}$, gleichgültig ob die Ecken des Tetraeders reell oder paarweise konjugiert imaginär sind[3]). Jede die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1\,(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführende Kollineation, die zwei mit $\mathfrak{p}$ inzidente Ebenen einander zuweist und die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1\,(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst verwandelt, daß dabei deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben, bestimmt zwei kollineare den Komplex Γ^2 erzeugende Räume. Folglich schließen wir:

Alle kollinearen Räume, die durch einen gegebenen Strahl $\mathfrak{p}$ einen Büschel oder durch einen gegebenen Punkt P einen Bündel homologer Ebenen senden, und deren Kollineationen eine gegebene windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1\,(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst überführen, daß deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben, bilden bzw. einen Büschel oder Bündel. Kollineare Räume, deren Kollineationen einer gegebenen Ebene die Ebenen oder einem gegebenen Punkte die Punkte des Raumes zuweisen und eine gegebene windschief involutorische Strahlenkongruenz $C_1^1\,(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst überführen, daß deren (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben, bilden einen Gebüschverband[4]).

2. Der Büschel kollinearer Räume heiße „hyperbolisch" oder „elliptisch", je nachdem die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1\,(aa_i, ss_i)$, die von den Kollineationen der Räume des Büschels in sich selbst übergeführt wird (**1.**), zwei reelle oder zwei konjugiert imaginäre Leitgeraden u, v hat.

Bei einem hyperbolischen Büschel kollinearer Räume schneiden die Strahlen der windschief involutorischen linearen Kongruenz $C_1^1\,(aa_i, ss_i)$ die Leitgeraden u, v bzw. in den Punktepaaren der Involutionen $u(A_u A_{ui}, B_u B_{ui}, \ldots)$ und $v(A_v A_{vi}, B_v B_{vi}, \ldots)$. Diese Punktinvolutionen und die zu ihnen wechselweise perspektiven Ebeneninvolutionen $u(\alpha_u \alpha_{ui}, \beta_u \beta_{ui}, \ldots)$ und $v(\alpha_v \alpha_{vi}, \beta_v \beta_{vi}, \ldots)$ sind für die Kollineationen der Räume des Büschels invariant. Die Geraden u, v sind die beiden stets

[2]) Jolles, a. a. O., Nr. 19.

[3]) Jolles, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **149** (1919), Nr. 31.

[4]) Jolles, a. a. O., Nr. 20.

eellen Gegenkanten des gemeinsamen Decktetraeders der Räume des yperbolischen Büschels. Sie enthalten die Ecken des Tetraeders, und iese sind als die Doppelelemente der Involutionen $u(A_u A_{ui}, B_u B_{ui}, \ldots)$ nd $v(A_v A_{vi}, B_v B_{vi}, \ldots)$ reell oder paarweise konjugiert imaginär. Das emeinsame Decktetraeder der kollinearen Räume des hyperbolischen üschels ist ein hyperbolisches Tetraeder erster, zweiter oder dritter Art.

Bei einem elliptischen Büschel kollinearer Räume ist das gemeinsame ecktetraeder seiner Räume elliptisch. Seine reellen Gegenkanten[5]) sind ie beiden einzigen reellen Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ der elliptischen windschief nvolutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(a a_i, s s_i)$, seine zwei Paare onjugiert imaginärer Ecken die Doppelemente der durch die Kongruenz C_1^1 in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ hervorgerufenen elliptischen Involutionen einander zugeordneter unkte, seine zwei Paare konjugiert imaginärer Ebenen die Doppelelemente er durch C_1^1 in $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ hervorgerufenen elliptischen Involutionen einander ugeordneter Ebenen.

Der Büschel kollinearer Räume läßt sich auf die Grundgebilde erster tufe projektiv beziehen[6]), liegt also im Projektivitätsbereiche der Grundebilde erster Stufe. Er enthält den identisch involutorischen Raum Σ_0, echs zu seinem Grundraume Σ halbaxiale[7]) kollineare Räume und vier äume, welche die Ecken des gemeinsamen Decktetraeders seiner Räume zw. zu singulären Punkten haben und durch einfach ausgeartete ollineationen erster Art auf Σ bezogen sind. Die zu Σ halbaxialen und ie zu Σ ausgeartet kollinearen Räume können paarweise imaginär sein, och bleiben von den sechs zu Σ halbaxialen Räumen mindestens wei reell.

3. Es seien Σ_1, Σ_{-1} in einem Büschel kollinearer nicht perspektiver äume zwei zu seinem Grundraume Σ invers kollineare Räume und α, $_1, \alpha_{-1}$ drei homologe Ebenen von $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_{-1}$. Dann entsprechen einnder in Σ_1, Σ_{-1} die Geraden $\alpha\alpha_1$ und $\alpha\alpha_{-1}$. Die drei Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_{-1}$ ehen aber durch dieselbe Gerade, folglich ist diese ein gemeinsamer eckstrahl der drei kollinearen Räume $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_{-1}$. Somit ergibt sich, enn $\alpha, \alpha_1, \alpha_{-1}$ nacheinander mit allen Tripeln homologer Ebenen von $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_{-1}$ zusammenfallen:

---

[5]) Jolles, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen, lath. Zeitschr. **13** (1922), Nr. 13.

[6]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abt., Hannover 1868, S. 125.

[7]) Auf halbaxiale Kollineationen hat zuerst Reye hingewiesen in seiner Abandlung: Räumliche Kollineationen, die Involutionen enthalten, Arch. d. Math. u. hys., (3) **19** (1912), S. 290.

Ein Büschel kollinearer Räume, der zwei zu seinem Grundraum invers kollineare Räume enthält, ist eine Büschelschar geschart kollineare Räume.

Jeder gemeinsame Deckstrahl der Räume einer Büschelschar geschar kollinearer Räume trägt einen zu ihr perspektiven Büschel projektive Punktreihen und einen zu ihr perspektiven Büschel projektiver Ebener büschel erster Ordnung. Die Büschelschar geschart kollinearer Räum ist hyperbolisch involutorisch gepaart, und ihre Doppelräume sind der ge schart und der identisch involutorische Raum, wenn je zwei ihrer Räum einander zugeordnet werden, die invers kollinear zum Grundraume sind[8]. Mit der Büschelschar ist jeder zu ihr perspektive Büschel projektive Punktreihen oder projektiver Ebenenbüschel erster oder projektiver Regel scharen zweiter Ordnung hyperbolisch involutorisch gepaart. Die beide Doppelelemente sind in allen drei Fällen die identische Involution un die im geschart involutorischen Raume der Basiskongruenz der Büschel schar enthaltene charakteristische Involution des betreffenden Büschels In einem zur Büschelschar perspektiven Büschel projektiver Punktreihe bilden das einem gegebenen Elemente X der Grundpunktreihe in de identischen Involution zugeordnete Element X_0 und das dem Elemente X in der charakteristischen Involution zugeordnete Element X_i, die Doppel elemente einer bemerkenswerten hyperbolischen Involution. Jedes Ele mentenpaar dieser Involution besteht aus den Punkten, die X in je einem Paare einander zugeordneter Reihen des hyperbolisch involutorischen Büschels projektiver Punktreihen[9]) entsprechen. Analoges gilt von der zur Büschel char perspektiven Büscheln projektiver Ebenenbüschel erster und projektiver Regelscharen zweiter Ordnung. Alle kollinearen Räume deren Kollineationen die Strahlen einer identisch involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1\,(a_0, s_0)$ in Ruhe lassen, bilden eine Büschelschar geschart kollinearer Räume mit der Basiskongruenz C_1^1. Die Kollineationen der Räume einer Büschelschar sind füreinander invariant und die Räume der Büschelschar paarweise invers kollinear zum Grundraume[8]).

4. Der Büschel kollinearer Räume ist speziell, wenn er zwei durch eine halbgescharte Kollineation erster Art φ_i aufeinander bezogene Räume Σ, Σ_i enthält, und also die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1\,(a a_i, s s_i)$, deren einander zugeordnete Strahlen φ_i paarweise miteinander vertauscht, durch die Kollineation je zweier Räume des Büschels $\Sigma\Sigma_i$ so in sich selbst übergeführt wird, daß die Doppelstrahlen und die Leit-

[8]) Jolles, a. a. O., Nr. 4.

[9]) Jolles, Partiell inverse und partiell involutorische Kollineationen und die Inzidenzen in zwei kollokalen korrelativen Feldern, Math. Zeitschr. 11 (1921), Nr. 1.

geraden von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in Ruhe bleiben. Die Leitgeraden und paarweise auch die Doppelstrahlen können konjugiert imaginär sein. In Σ_i gehen zwei der im allgemeinen Büschel enthaltenen halbaxialen kollinearen Räume (2.) auf.

Die Strahlen, welche einem gegebenen Strahle g des Grundraumes Σ eines allgemeinen Büschels kollinearer Räume in den übrigen Räumen des Büschels entsprechen, bilden mit g eine zum Büschel perspektive Regelschar zweiter Ordnung[10]). Sie besteht, wenn g mit einem Strahle s der linearen Kongruenz C_1^1 zusammenfällt, aus lauter Strahlen von C_1^1 und enthält bei dem speziellen Büschel $\Sigma\Sigma_i$, insbesondere den s in $C_1^1(aa_i, ss_i)$ zugeordneten Strahl s_i. Wählen wir die Strahlen s, s_i zu Doppelstrahlen einer hyperbolischen Involution in dieser durch den Kongruenzstrahl s bestimmten Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{S}^2$, so zieht die hyperbolisch involutorische Paarung der Regelschar $\mathfrak{S}^2$ die des zu ihr perspektiven Büschels kollinearer Räume $\Sigma\Sigma_i$ nach sich. Gleichzeitig werden alle ∞^3 Regelscharen zweiter Ordnung von C_1^1, die aus homologen Strahlen der Räume von $\Sigma\Sigma_i$ bestehen, hyperbolisch involutorisch gepaart. Diese hyperbolische Involution $\Sigma_1, \Sigma_{-1}; \ldots; \Sigma_m, \Sigma_{-m}; \ldots$ der Räume von $\Sigma\Sigma_i$ hat den Raum Σ_i und den identisch involutorischen Raum Σ_0 zu Doppelräumen. Je zwei einander zugeordnete Strahlen s, s_i von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ d. h. die Strahlen $s = s_0$ und s_i von Σ_0 und Σ_i werden daher harmonisch getrennt durch die dem Strahle $s = s_0$ von Σ in den Räumen $\Sigma_1, \Sigma_{-1}; \ldots; \Sigma_m, \Sigma_{-m}; \ldots$ bzw. entsprechenden Strahlen $s_1, s_{-1}; \ldots; s_m, s_{-m}; \ldots$ der durch s bestimmten Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{S}^2$.

Bei einem hyperbolischen Büschel $\Sigma\Sigma_i$ schneiden die Leitgeraden u, v von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ die hyperbolisch involutorischen Regelscharen $\mathfrak{S}^2$ in hyperbolischen Punktinvolutionen, deren Punktepaare je auf einem Strahlenpaare von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ liegen. In den beiden von u, v getragenen, zu dem hyperbolischen Büschel $\Sigma\Sigma_i$ perspektiven Büscheln projektiver Punktreihen sind sonach je zwei zu der einen oder der andern Grundreihe invers projektive Punktreihen bzw. homologe Gebilde in den kollinearen Räumen eines der Raumpaare $\Sigma_1, \Sigma_{-1}; \ldots; \Sigma_m, \Sigma_{-m}; \ldots$. Mit Rücksicht hierauf nennen wir[11]) — gleichgültig ob ein hyperbolischer oder elliptischer Büschel $\Sigma\Sigma_i$ vorliegt — je zwei durch die Räume Σ_0, Σ_i harmonisch getrennte Räume $\Sigma_1, \Sigma_{-1}; \ldots; \Sigma_m, \Sigma_{-m}; \ldots$ „partiell invers" zum Grundraume Σ des Büschels.

---

[10]) Reye, Über lineare Mannigfaltigkeiten projektiver Ebenenbüschel und kollinearer Bündel oder Räume I, Journ. für die reine u. angew. Math. **104** (1889), S. 3, Nr. 8.

[11]) Die gleiche Bezeichnung wurde bei den analogen Untersuchungen in der Ebene benutzt. (Jolles, a. a. O., Nr. 2).

Die zum Raume Σ partiell inversen Räume Σ_i, Σ_{-i} sind identisch. Die Σ_i auf den Grundraum Σ beziehende halbgescharte Kollineation erster Art φ_i heiße[11]) deshalb „partiell involutorisch" und Σ_i selbst der „partiell involutorische" Raum des speziellen Büschels $\Sigma\Sigma_i$. Im speziellen Büschel $\Sigma\Sigma_i$ bilden die zu Σ partiell inversen Räume die Elementenpaare einer hyperbolischen Involution, deren Doppelelemente der identisch involutorische Raum Σ_0 und der zu Σ partiell involutorische Raum Σ_i sind.

5. Je zwei kollineare Räume eines Büschels kollinearer Räume erzeugen denselben tetraedralen Strahlenkomplex. Ist $C_1^1(aa_i, ss_i)$ die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz, die durch die Kollineation je zweier Räume des Büschels in sich selbst übergeführt wird, so enthält der tetraedrale Komplex die Leitscharen der ∞^2 Regelscharen zweiter Ordnung von C_1^1, die aus homologen Strahlen der kollinearen Räume des Büschels bestehen. Nach einem gegebenen Strahle a des Komplexes senden die kollinearen Räume des Büschels einen Büschel homologer Ebenen. Sie bilden in a einen zum Büschel kollinearer Räume perspektiven Ebenenbüschel erster Ordnung.

Bei dem speziellen Büschel kollinearer Räume $\Sigma\Sigma_i$, der den zum Grundraume Σ partiell involutorischen Raum Σ_i enthält, zieht die hyperbolisch involutorische Paarung mit den Doppelräumen Σ_0 und Σ_i (4.) die hyperbolisch involutorische Paarung der Ebenen des Ebenenbüschels a nach sich. Die Doppelebenen der hyperbolischen Ebeneninvolution a bilden die mit dem Strahle a inzidenten homologen Ebenen $\xi = \xi_0$ und ξ_i von Σ_0 und Σ_i. Je zwei einander zugeordnete Ebenen $\xi_1, \xi_{-1}; \ldots; \xi_m, \xi_{-m}; \ldots$ der Ebeneninvolution fallen bzw. mit zwei homologen Ebenen der partiell inversen Räume $\Sigma_1, \Sigma_{-1}; \ldots; \Sigma_m, \Sigma_{-m}; \ldots$ des Büschels $\Sigma\Sigma_i$ zusammen. In jeder der ∞^2 Regelscharen zweiter Ordnung von C_1^1, die aus homologen Strahlen der kollinearen Räume von $\Sigma\Sigma_i$ bestehen, und deren Leitscharen im tetraedralen Komplexe enthalten sind, liegt je ein Strahlenpaar von $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Ist der Strahl x von C_1^1 als Strahl von Σ mit der Ebene ξ von Σ inzident, und geht ξ durch den Strahl a des tetraedralen Komplexes, so enthält die ξ in Σ_i entsprechende Ebene ξ_i als x entsprechenden Strahl den x in $C_1^1(aa_i, ss_i)$ zugeordneten Strahl x_i. Der Komplexstrahl a wird somit aus den Kongruenzstrahlen x, x_i durch zwei homologe Ebenen von Σ, Σ_i projiziert und liegt in der durch die homologen Ebenenbüschel x, x_i von Σ, Σ_i erzeugten Regelschar zweiter Ordnung. Die Leitschar dieser Regelschar des tetraedralen Komplexes besteht aus dem Kongruenzstrahle x und aus den x in den Räumen des Büschels $\Sigma\Sigma_i$ entsprechenden Strahlen, ist also eine in der Kongruenz C_1^1 enthaltene aus homologen Strahlen der Räume von Σ, Σ_i gebildete Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{X}^2$. Fällt $\mathfrak{X}^2$ nacheinander mit den übrigen

Regelscharen zweiter Ordnung der linearen Kongruenz C_1^1 zusammen, die aus homologen Strahlen der Räume des Büschels $\Sigma\Sigma_i$ bestehen, so beschreibt die Leitschar von $\mathfrak{X}^2$ den von je zwei Räumen des Büschels erzeugten tetraedralen Strahlenkomplex. Jeder seiner Strahlen schneidet ein Strahlenpaar von $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Der tetraedrale Strahlenkomplex ist somit speziell. Kurz:

Der tetraedrale Strahlenkomplex Γ_i^2, den je zwei kollineare Räume eines speziellen Büschels kollinearer Räume $\Sigma\Sigma_i$ erzeugen, in dem ein zum Grundraume Σ des Büschels partiell involutorischer Raum Σ_i liegt, ist selbst speziell. Jeder Strahl von Γ_i^2 ist mit einem Strahlenpaare der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ inzident, deren Projektivität in der Kollineation φ_i der Räume Σ, Σ_i enthalten ist.

Die zwei einander zugeordneten Strahlen x, x_i von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in den mit dem Strahle a von Γ_i^2 inzidenten homologen Ebenen ξ, ξ_i von Σ, Σ_i entsprechen in diesen Räumen einander doppelt. Somit sind die Punkte $x_i\xi$ und $x\xi_i$ homologe Punkte von Σ, Σ_i, und der Komplexstrahl a ist gleichzeitig die Schnittgerade zweier homologen Ebenen und die Verbindungsgerade zweier homologen Punkte der Räume. Die von den homologen Ebenenbüscheln x, x_i und die von den homologen Punktreihen x, x_i von Σ, Σ_i erzeugten beiden Regelscharen sind folglich identisch. In anderen Worten:

Das F^2-System und das Φ^2-Gewebe[12]) *im speziellen tetraedralen Strahlenkomplexe Γ_i^2 haben ∞^3 Paare von Flächen zweiten Grades gemein. Die Flächen jedes Paares werden erzeugt von je zwei homologen Ebenenbüscheln oder Punktreihen erster Ordnung der Γ_i^2 erzeugenden partiell involutorischen Räume Σ, Σ_i, deren Träger ein Strahlenpaar der durch die partiell involutorischen Räume Σ, Σ_i bestimmten windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bilden.*

6. Die Kollineationen, welche die Räume eines Büschels kollinearer Räume $\Sigma\Sigma_1$ aufeinander beziehen, mögen die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführen (**1.**). Dem Träger C_1^1 von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ entsprechen als Gebilde des Grundraumes Σ in den zu Σ kollinearen Räumen des Büschels ∞^1 mit C_1^1 kollokale projektive lineare Strahlenkongruenzen. Sie bilden mit C_1^1 den „Büschel projektiver linearen Strahlenkongruenzen“ $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_1$. Er ist „hyperbolisch“ oder „elliptisch“, je nachdem C_1^1 hyperbolisch oder elliptisch ist. Die vier (reellen oder paarweise konjugiert imaginären) Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind die gemeinsamen Doppelstrahlen der projektiven

[12]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abt., vierte Aufl., Leipzig 1910, S. 1 u. 2.

linearen Strahlenkongruenzen des Büschels. Die homologen Strahlen seiner projektiven linearen Strahlenkongruenzen bilden zum Büschel $\Sigma\Sigma_1$ perspektive Regelscharen zweiter Ordnung. Sonach läßt sich der Büschel projektiver linearen Strahlenkongruenzen $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_1$ durch den Büschel kollinearer Räume $\Sigma\Sigma_1$ projektiv auf andere Gebilde erster Stufe der synthetischen Geometrie beziehen. Er liegt im Projektivitätsbereiche der Grundgebilde erster Stufe.

Der Büschel projektiver linearen Strahlenkongruenzen $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_1$ ist speziell, wenn der Büschel $\Sigma\Sigma_1$ mit dem speziellen Büschel kollinearer Räume $\Sigma\Sigma_i$ zusammenfällt, der zwei durch eine partiell involutorische Kollineation (4.) aufeinander bezogene Räume Σ, Σ_i enthält. Die partiell involutorische Kollineation vertauscht die einander zugeordneten Strahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ paarweise miteinander, und der spezielle Büschel projektiver linearen Strahlenkongruenzen $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_i$ enthält die zu seiner Grundkongruenz C_1^1 windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Sie ist seine „charakteristische Involution". Der spezielle Büschel $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_i$ werde als der „Büschel projektiver linearen Strahlenkongruenzen mit einer charakteristischen Involution" bezeichnet. Außer der charakteristischen Involution enthält dieser spezielle Büschel die identisch involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(a_0, s_0)$. Beide involutorische Kongruenzen bestimmen als Doppelelemente im Büschel $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_i$ eine hyperbolische Involution. Sie ist perspektiv zu der hyperbolischen Involution im Büschel $\Sigma\Sigma_i$, deren Doppelelemente der identisch involutorische Raum Σ_0 und der zu Σ partiell involutorische Raum Σ_i sind. Je zwei einander zugeordnete Kongruenzen der hyperbolischen Involution im Büschel $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_i$ sind partiell invers zur Grundkongruenz C_1^1, und je zwei zu C_1^1 partiell inverse Kongruenzen trennen seine identisch involutorische und seine zu C_1^1 partiell involutorische Kongruenz harmonisch. Nun ist jede in C_1^1 gelegene zum Büschel $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_i$ perspektive Regelschar zweiter Ordnung mit ihm zugleich involutorisch, somit gilt:

Der zum speziellen Büschel kollinearer Räume $\Sigma\Sigma_i$ perspektive Büschel projektiver linearen Strahlenkongruenzen ist ein spezieller Büschel $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_i$ mit der charakteristischen Involution $C_1^1(aa_i, ss_i)$. In $[C_1^1(aa_i, ss_i)]_i$ sind der Strahl $x = x_0$ der identisch involutorischen Kongruenz $C_1^1(a_0, s_0)$ und der x in der charakteristisch involutorischen Kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ zugeordnete Strahl x_i die Doppelstrahlen einer hyperbolisch involutorischen Regelschar zweiter Ordnung, deren einander zugeordnete Strahlen bzw. homologe Elemente in je zwei zu C_1^1 partiell inversen Kongruenzen des speziellen Büschels sind.

§ 2.

Eine neue Bestimmung der Raumkorrelation und die Realitätsbedingungen für das sich selbst entsprechende Tetraeder zweier korrelativen Räume.

7. *Es gibt nur eine Korrelation ψ_1, die eine gegebene hyperbolische oder elliptische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, dabei deren Doppelstrahlen in Ruhe läßt und einem gegebenen Punkte P eine gegebene Ebene π_1 zuweist. Die Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ können reell oder paarweise konjugiert imaginär sein.*

Dieser Satz wird im folgenden zunächst für eine hyperbolische und dann für eine elliptische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bewiesen.

a) Ist die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ *hyperbolisch* und sind Σ, Σ_1 die durch die Korrelation ψ_1 aufeinander bezogenen Räume, so entsprechen in Σ_1 dem mit den Leitgeraden u, v von C_1^1 und mit P inzidenten Strahle p und den Punkten $pu = P_u$ und $pv = P_v$ bzw. der mit u, v und der Ebene π_1 inzidente Strahl p_1 und die Ebenen $p_1 v = \pi_{v1}$ und $p_1 u = \pi_{u1}$. Somit besteht zwischen der Punktreihe p von Σ und dem auf sie bezogenen Ebenenbüschel p_1 von Σ_1 die Projektivität:

$$p(PP_uP_v) \overline{\wedge} p_1(\pi_1 \pi_{v1} \pi_{u1}).$$

Die Strahlenpaare von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ schneiden nun die Leitgeraden u, v von C_1^1 in den Punktpaaren der Involutionen $u(A_uA_{ui}, B_uB_{ui}, \ldots)$ und $v(A_vA_{vi}, B_vB_{vi}, \ldots)$. In dem durch die Involution $u(A_uA_{ui}, B_uB_{ui}, \ldots)$ gehenden Büschel projektiver Punktreihen liegen zwei projektive Punktreihen $u(P_u, \ldots)$ und $u(P_{u1}, \ldots)$, die durch die homologen Punkte P_u und $p_1 u = P_{u1}$ bestimmt sind. Der Punktreihe $u(P_u, \ldots)$ von Σ entspricht aber in Σ_1 der die zu ihr projektive Punktreihe $u(P_{u1}, \ldots)$ aus v projizierende Ebenenbüschel $v(\pi_{v1}, \ldots)$. Ebenso liegen in dem durch die Involution $v(A_vA_{vi}, B_vB_{vi}, \ldots)$ gehenden Büschel projektiver Punktreihen zwei projektive Punktreihen mit den homologen Punkten P_v und $p_1 v = P_{v1}$, und der einen von ihnen — der in Σ enthaltenen Punktreihe $v(P_v, \ldots)$ — entspricht in Σ_1 der die andere aus u projizierende Ebenenbüschel $u(\pi_{u1}, \ldots)$. Folglich sind die zentrischen Bündel von Σ_1 mit den Mittelpunkten $p_1 v$ und $p_1 u$ so auf die Felder der Ebenen pu und pv von Σ bezogen, daß den Ebenenbüscheln $p_1(\pi_1, \pi_{v1}, \pi_{u1}, \ldots)$, $v(\pi_{v1}, \ldots)$ und $u(\pi_{u1}, \ldots)$ bzw. die Punktreihen $p(P, P_u, P_v, \ldots)$, $u(P_u, \ldots)$ und

$v(P_v, \ldots)$ entsprechen. Werden aber zwei zentrische Bündel eines Raumes auf zwei ebene Felder eines anderen korrelativ so bezogen, daß den gemeinsamen Ebenen der Bündel die gemeinsamen Punkte der ebenen Felder entsprechen, so sind die beiden Räume korrelativ aufeinander bezogen[13]. Die Korrelation ψ_1, welche die zentrischen Bündel mit den Mittelpunkten $p_1 v$, $p_1 u$ auf die Felder der Ebenen pu, pv in der angegebenen Weise bezieht, vertauscht die beiden Punktinvolutionen $u(A_u A_{ui}, B_u B_{ui}, \ldots)$ und $v(A_v A_{vi}, B_v B_{vi}, \ldots)$ mit den sie wechselweise aus u, v projizierenden Ebeneninvolutionen. Für sie ist also die hyperbolische windschiefe involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ invariant. Es gibt sonach eine und nur eine Korrelation ψ_1, die eine gegebene hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe läßt und einem gegebenen Punkte P eine gegebene Ebene π_1 zuweist.

Analog läßt sich der für die folgende Untersuchung wichtige Hilfssatz beweisen:

Es gibt nur eine Korrelation ψ_1, die eine gegebene hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, deren Leitgeraden und zwei reelle windschiefe Doppelstrahlen in Ruhe läßt, dabei deren zwei übrige (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen miteinander vertauscht und einem gegebenen Punkte P eine gegebene Ebene π_1 zuweist.

b) Ist die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ *elliptisch*, so hat sie[5] zwei reelle Doppelstrahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und zwei konjugiert imaginäre $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Die beiden Doppelstrahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und die beiden konjugiert imaginären Leitgeraden u, v von C_1^1 bilden die Basiskurve[14] eines Büschels von Regelflächen zweiter Ordnung $F^2(au\,bv)$, deren beide Strahlenscharen involutorisch gepaart sind. Die eine Regelschar jeder Fläche des Büschels liegt in $C_1^1(aa_i, ss_i)$, die andere im geschart involutorischen Raume Σ_g von C_1^1. Die mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ inzidenten Strahlen bilden folglich eine in Σ_g enthaltene hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $K_1^1(\mathfrak{m}\mathfrak{m}', \mathfrak{n}\mathfrak{n}')$. Eine Korrelation ψ_1, welche die elliptische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst so überführt, daß ihre Doppelstrahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in Ruhe bleiben und folglich ihre Leitgeraden u, v miteinander vertauscht werden, verwandelt gleichzeitig die hyperbolische wind-

[13] v. Staudt, Geometrie der Lage, 1847, Nr. 132, III.

[14] Jolles, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen, Math. Zeitschr. 13 (1922), Nr. 14.

hief involutorische lineare Strahlenkongruenz $K_1^1(\mathfrak{m}\mathfrak{m}', \mathfrak{n}\mathfrak{n}')$ so in sich lbst, daß ihre Leitgeraden $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und ihre Doppelstrahlen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ in Ruhe leiben, hingegen ihre Doppelstrahlen u, v ineinander übergehen. Eine orrelation ψ_1, die $K_1^1(\mathfrak{m}\mathfrak{m}', \mathfrak{n}\mathfrak{n}')$ derart in sich selbst überführt, ist ber nach a) bestimmt, wenn sie noch einem gegebenen Punkte P eine egebene Ebene π_1 zuweist. Somit läßt sich auch nur eine Korrelation ψ_1 estimmen, welche die gegebene elliptische windschief involutorische lineare trahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, deren Doppel- trahlen in Ruhe läßt und dem Punkte P die Ebene π_1 zuweist. Unser ehrsatz gilt, wie behauptet wurde, gleichgültig ob die windschief in- olutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ hyperbolisch oder lliptisch ist.

Beiläufig bemerkt, führt die Korrelation ψ_1, welche die windschief nvolutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst ver- andelt, noch zwei windschief involutorische Strahlenkongruenzen in sich lbst über. Beide haben die durch ψ_1 miteinander vertauschbaren Leit- eraden u, v von C_1^1 zu gemeinsamen Doppelstrahlen. Jede hat außerdem in anderes Paar Gegenkanten des sich selbst entsprechenden Tetraeders on Σ, Σ_1 zu Leitgeraden und das übrigbleibende Paar zu Doppelstrahlen.

8. Die Korrelation ψ_1 zweier Räume Σ, Σ_1 sei durch eine windschief nvolutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bestimmt, die durch ψ_1 so in sich selbst übergeführt wird, daß die (reellen oder paarweise onjugiert imaginären) Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in Ruhe bleiben, nd ferner (7.) durch die einem gegebenen Punkte P von Σ entsprechende bene π_1 von Σ_1. Dann bilden die zwei Paare Doppelstrahlen und die eiden Leitgeraden u, v von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ die drei Paare Gegenkanten des ich selbst entsprechenden Tetraeders der korrelativen Räume Σ, Σ_1.

Ist[15]) die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$:

a) eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz rster Art, so sind alle vier Doppelstrahlen reell. Das sich selbst ent- prechende Tetraeder der korrelativen Räume ist reell, ein hyperbolisches etraeder erster Art.

b) eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkon- ruenz zweiter Art, so bestehen ihre vier Doppelstrahlen aus zwei Paaren onjugiert imaginärer Geraden zweiter Art. Das sich selbst entsprechende etraeder der korrelativen Räume Σ, Σ_1 hat nur ein Paar reeller mit en Leitgeraden u, v von C_1^1 zusammenfallenden Gegenkanten. u und v t mit je einem Paare konjugiert imaginärer Ecken und je einem Paare onjugiert imaginärer Ebenen des Tetraeders inzident. Das sich selbst

[15]) Jolles, s. a. O. Nr. 12, Nr. 13 und Nr. 19.

entsprechende Tetraeder der korrelativen Raume Σ, Σ_1 ist ein hype bolisches Tetraeder zweiter Art.

c) eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenko gruenz dritter Art, so bestehen ihre vier Doppelstrahlen aus zwei Paare konjugiert imaginärer Geraden erster Art. Das sich selbst entsprechend Tetraeder der korrelativen Räume Σ, Σ_1 hat wiederum ein Paar reelle mit den Leitgeraden u, v von C_1^1 zusammenfallenden Gegenkanten. D eine von ihnen ist mit einem Paare reeller Ecken und einem Paare ko jugiert imaginärer Ebenen, die andere umgekehrt mit einem Paare reell Ebenen und einem Paare konjugiert imaginärer Ecken des Tetraeders i zident. Das sich selbst entsprechende Tetraeder der korrelativen Räum ist ein hyperbolisches Tetraeder dritter Art.

d) eine elliptische windschief involutorische lineare Strahlenkongruen so hat sie ein Paar reeller und ein Paar konjugiert imaginärer Doppe strahlen. Auch hier hat das sich selbst entsprechende Tetraeder der ko relativen Räume Σ, Σ_1 nur zwei reelle Gegenkanten. Sie sind aber Strahle von C_1^1, während das eine Paar konjugiert imaginärer Gegenkanten au den beiden konjugiert imaginären Leitgeraden u, v, das andere Paar au zwei konjugiert imaginären Strahlen der Kongruenz besteht. Das sic selbst entsprechende Tetraeder der korrelativen Räume ist ein elliptische Tetraeder.

In den Fällen a), b) und d) bilden die aus den zwei Paaren wind schiefer Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ gebildeten ein fachen Raumvierseite $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ die Basiskurve eines Büschels von Regelfläche zweiter Ordnung, deren beide Strahlenscharen in dem geschart involutori schen Raume Σ_g von C_1^1 involutorisch gepaart sind und bzw. das Strahlen paar $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ zu Doppelstrahlen haben[15]). Sowohl $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ wie $\mathfrak{c}$, können reell oder konjugiert imaginär sein.

§ 3.

Die Korrelation zweier Räume und ihre Beziehung zur partiell inversen und partiell involutorischen Raumkollineation.

9. Zwei auf den Grundraum Σ durch die inversen Korrelatione ψ_1, ψ_1^{-1} bezogene Räume Σ_1, Σ_{-1} bestimmen in ihm ∞^2 Punktreihe erster Ordnung, die zu den ihnen entsprechenden Ebenenbüscheln und ∞ Ebenenbüschel erster Ordnung, die zu den ihnen entsprechenden Punkt reihen von Σ_1^* und Σ_{-1}^* involutorisch liegen. Die Träger der ∞^2 Punkt

hen bilden[16]) einen linearen Strahlenkomplex Γ_0, die der ∞^2 Ebenen-schel einen linearen Strahlenkomplex Γ_0'. Beide Komplexe werden rch die inversen Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} miteinander vertauscht. Jeder ahl der Schnittkongruenz C_1^1 von Γ_0, Γ_0' ist der Träger einer Punkt-he und eines Ebenenbüschels von Σ, die zu den ihnen in Σ_1 und Σ_{-1} ent-echenden Gebilden involutorisch liegen. Die lineare Strahlenkongruenz wird durch die inversen Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} in sich selbst über-führt.

Sind die durch ψ_1 miteinander vertauschbaren Gegenkanten u, v des h selbst entsprechenden Tetraeders der korrelativen Räume Σ, Σ_1 reell .), so sind die mit ihnen inzidenten Strahlen die Träger von Punkt-hen und Ebenenbüscheln, die zu den ihnen in Σ_1 und Σ_{-1} entsprechen-n Gebilden bzw. involutorisch liegen. Die mit den Gegenkanten u, v s sich selbst entsprechenden Tetraeders von Σ, Σ_1 inzidenten Strahlen lden also die lineare Strahlenkongruenz C_1^1.

Sind die durch ψ_1 miteinander vertauschbaren Gegenkanten u, v des h selbst entsprechenden Tetraeders der korrelativen Räume Σ, Σ_1 kon-giert imaginär, erweist sich also das Tetraeder als elliptisch (8.), so nd seine zwei reellen Gegenkanten die zwei einzigen reellen Deckstrahlen b von Σ_1, Σ_{-1} und die Punktinzidenzfläche P_i^2 der beiden korrelativen äume ist eine die Strahlen a, b enthaltende Regelfläche zweiter Ordnung. un ist die Kollineation φ_g des geschart involutorischen Raumes Σ_g der rahlenkongruenz C_1^1 invariant für die Korrelation ψ_1, folglich ver-ndelt umgekehrt auch die Kollineation φ_g die Korrelation ψ_1 der äume Σ, Σ_1 und somit auch deren Punktinzidenzfläche P_i^2 in sich selbst. a auf P_i^2 außer den Strahlen a, b von C_1^1 keine weiteren reellen Strahlen r Kongruenz liegen, so sind die Strahlen jeder Regelschar von P_i^2 in Σ_g aarweise einander zugeordnet. Die Strahlen der einen Regelschar[17]) lden eine hyperbolische Involution mit den reellen Doppelstrahlen a, b, e der andern eine elliptische Involution, die zu Doppelstrahlen zwei njugiert imaginäre Strahlen c, b von C_1^1 hat. Die Regelfläche P_i^2 ist lglich in dem F^2-Büschel enthalten (8.), dessen Basiskurve aus zwei aaren von Doppelstrahlen der korrelativen Räume Σ, Σ_1 besteht. Die njugiert imaginären Strecken c, b sind also ebenfalls ein Paar Doppel-rahlen von Σ, Σ_1. Die Korrelation ψ_1 läßt hiernach außer den reellen egelstrahlen a, b noch die konjugiert imaginären Leitstrahlen c, b von $_i^2$ in Ruhe. Das sich selbst entsprechende Tetraeder der korrelativen äume Σ, Σ_1 hat folglich zu Gegenkanten, die auf die Deckstrahlen der

[16]) R. Sturm, Über die reziproke und mit ihr zusammenhängenden Verwandt-haften, Math. Ann. 19 (1882), Nr. 17 und Nr. 18.

[17]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, Nr. 102.

Räume fallen, die reellen Strahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und die konjugiert imaginär Strahlen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ von C_1^1. Sonach fallen seine durch ψ_1 vertauschbaren Gegk kanten mit den konjugiert imaginären Leitgeraden u, v von C_1^1 zusamm Kurz, welche Realitätsbedingungen das sich selbst entsprechende Tetraec der korrelativen Räume Σ, Σ_1 auch erfüllen mag, es gilt der Satz:

Sind die Räume Σ_1, Σ_{-1} bzw. durch die inversen Korrelation ψ_1, ψ_1^{-1} auf den Raum Σ bezogen, so bilden[18]) *alle Geraden in Σ, der Punktreihen und Ebenenbüschel zu den ihnen in Σ_1 und Σ_{-1} er sprechenden Gebilden involutorisch liegen, eine lineare Strahlenkongruenz C Die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 si die durch ψ_1 miteinander vertauschbaren Kanten des sich selbst en sprechenden Tetraeders von Σ, Σ_1.*

Ein Paar Punkte oder Ebenen eines Strahles der linearen Kongruen C_1^1 nennen wir „Wechselpunkte“ oder „Wechselebenen“ der korrelative Räume Σ, Σ_1, wenn jeder Punkt oder jede Ebene eines solchen Paar als Element von Σ mit dem Elemente inzident ist, das dem ande Punkte oder der andern Ebene als Element von Σ in Σ_1 entspricht. Al Wechselpunktepaare von Σ, Σ_1 bilden die Elementenpaare eines speziellé kubischen Punktsystemes $[\Sigma\Sigma_1]^3$, alle Wechselebenenpaare die Elemente paare eines speziellen kubischen Ebenensystemes $[\Sigma\Sigma_1]^{III}$. Beide kubische Systeme haben die (reellen oder konjugiert imaginären) singulären Haup strahlen u, v und heißen das „Wechselpunktsystem“ und das „Wechse ebenensystem“ der korrelativen Räume Σ, Σ_1. Die durch die inverse Korrelationen ψ_1 und ψ_1^{-1} bzw. aufeinander bezogenen Räume Σ, Σ_1 un Σ, Σ_{-1} haben dasselbe Wechselpunkt- und Wechselebenensystem.

10. Die durch die inversen Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} auf den Raum bezogenen Räume Σ_1, Σ_{-1} sind durch die Kollineation ψ_1^{-2} aufeinande bezogen. Das Decktetraeder der kollinearen Räume Σ_1, Σ_{-1} fällt mi dem gemeinsamen, sich selbst entsprechenden Tetraeder der korrelative Räume Σ, Σ_1 und Σ, Σ_{-1} zusammen, gleichgültig, ob seine Ecken ree oder paarweise konjugiert imaginär sind.

Bei zwei korrelativen Räumen Σ, Σ_1 mit einem sich selbst ent sprechenden hyperbolischen Tetraeder erster Art, oder einem sich selbs entsprechenden elliptischen Tetraeder (8.) können die Strahlen de linearen Kongruenz, welche das Wechselpunkt- und das Wechsel ebenensystem der Räume tragen (9.), paarweise durch zwei reelle wind schiefe Deckstrahlen harmonisch getrennt werden, C_1^1 wird dadurch bzw in eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruen

[18]) R. Sturm beweist a. a. O., Nr. 18 diesen Satz nur für hyperbolische linear Strahlenkongruenzen C_1^1.

ter Art oder in eine elliptische windschief involutorische lineare Strahlen-
ngruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ verwandelt[19]). Eine Korrelation transformiert
n vier harmonische Strahlen einer Regelschar zweiter Ordnung wiederum
vier harmonische Strahlen. Die Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} transformieren
ßerdem die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 so in sich selbst, daß die in C_1^1
legenen Deckstrahlen des sich selbst entsprechenden Tetraeders in Ruhe
eiben. Somit sind im vorliegenden Falle die Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} be-
mmt, sobald außer der windschief involutorischen linearen Strahlen-
ngruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ noch ein Punkt P von Σ und die ihm in Σ_1, Σ_{-1}
w. entsprechenden Ebenen π_1, π_{-1} gegeben sind (7.).

Bei zwei korrelativen Räumen Σ, Σ_1 mit einem sich selbst ent-
rechenden hyperbolischen Tetraeder zweiter Art (8.) tragen seine beiden
rch ψ_1 und ψ_1^{-1} miteinander vertauschbaren Kanten u, v, bzw. die ellip-
schen Punktinvolutionen $u(A_uA_{ui}, B_uB_{ui}, \ldots)$ und $v(A_vA_{vi}, B_vB_{vi}, \ldots)$,
ren konjugiert imaginäre Doppelpunkte die Ecken des Tetraeders sind.
ei zwei korrelativen Räumen Σ, Σ_1 mit einem sich selbst entsprechenden
perbolischen Tetraeder dritter Art liegt auf einer der Kanten u, v eine
wei seiner Ecken bestimmende hyperbolische, auf der andern eine seine
wei übrigen Ecken bestimmende elliptische Punktinvolution. In jedem
eser beiden Fälle entspricht der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 als Ge-
lde von Σ in Σ_1 eine lineare Strahlenkongruenz C_{11}^1 und in Σ_{-1} eine
neare Strahlenkongruenz C_{-11}^1, die beide projektiv zueinander sind und
on u und von v in je zwei projektiven Punktreihen geschnitten werden.
as eine Paar projektiver Punktreihen liegt in dem Büschel projektiver
unktreihen mit der charakteristischen Involution $u(A_uA_{ui}, B_uB_{ui}, \ldots)$,
as andere Paar in dem Büschel projektiver Punktreihen mit der charak-
eristischen Involution $v(A_vA_{vi}, B_vB_{vi}, \ldots)$. Je zwei Strahlen, die zwei
inander zugeordnete Punkte beider Punktinvolutionen projizieren, bilden
mit ein Strahlenpaar einer in C_1^1 gelegenen windschief involutorischen
nearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$, die durch ψ_1 und ψ_1^{-1} so in sich
elbst übergeführt wird, daß ihre Doppelstrahlen in Ruhe bleiben. Wiederum
ind also die inversen Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} bestimmt durch die wind-
chief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ und die einem
egebenen Punkte P von Σ in Σ_1, Σ_{-1} entsprechenden Ebenen π_1, π_{-1}.

11. *Beziehen die inversen Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} die Räume Σ_1, Σ_{-1} uf den Raum Σ, und verwandeln sie dabei die windschief involutorische ineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst, während sie deren reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe assen, so trennen die jedem Strahle p von C_1^1 entsprechenden Strahlen*

[19]) Jolles, a. a. O., Nr. 14.

p_1, p_{-1} *von* Σ_1, Σ_{-1} *das Strahlenpaar* p, p_i *von* $C_1^1(aa_i, ss_i)$ *h*
monisch.

Bei einer hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahl
kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ schneiden nämlich die Leitgeraden u, v die Strahl
paare von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in den Elementenpaaren der Punktinvolutio
$u(A_uA_{ui}, B_uB_{ui}, \ldots)$ und $v(A_vA_{vi}, B_vB_{vi}, \ldots)$. Somit trifft u wi
die C_1^1 in Σ_1, Σ_{-1} entsprechenden linearen Strahlenkongruenzen in z
projektiven Punktreihen, die bzw. in den durch $u(A_uA_{ui}, B_uB_{ui}, .$
und $v(A_vA_{vi}, B_vB_{vi}, \ldots)$ gehenden Büscheln projektiver Punktreih
liegen und zu deren Grundreihen invers projektiv sind. Sind aber P
ein Punktepaar in der charakteristischen Involution eines Büschels p
jektiver Punktreihen und P_1, P_{-1} die P entsprechenden Punkte in zwe
seiner Punktreihen, die invers projektiv zur Grundreihe sind, so
$PP_1P_iP_{-1}$ ein harmonischer Punktwurf. Folglich trennt jedes Strahl
paar p, p_i der hyperbolischen windschief involutorischen linearen Strahl
kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ die dem Strahle p in Σ_1, Σ_{-1} entsprechend
Strahlen p_1, p_{-1} harmonisch. Der harmonische Strahlenwurf pp_1p_i
liegt in einer Regelschar zweiter Ordnung, oder wenn p mit einem Dopp
punkte einer der Involutionen $u(A_uA_{ui}, B_uB_{ui}, \ldots)$, $v(A_vA_{vi}, B_vB_{vi}, .$
inzident ist, in einem Strahlenbüschel erster Ordnung.

Bei einer elliptischen windschief involutorischen linearen Strahl
kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ ist die gemeinsame Punktinzidenzfläche P_i^2
korrelativen Räume Σ, Σ_1 und Σ, Σ_{-1} eine Regelfläche zweiter Ordnu
deren Regelscharen auseinander zugeordneten Strahlen des geschart inv
lutorischen Raumes von C_1^1 bestehen (**9.**). Die eine Regelschar von
ist hyperbolisch, die andere elliptisch involutorisch gepaart. Jene hat
Doppelstrahlen die beiden reellen, diese die beiden konjugiert imaginär
Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Für P_i^2 sind folglich je zwei einand
zugeordnete Strahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ reziprok polar[20]). Die Fläche
wird als Inzidenzfläche eines sekundären polaren Raumes von C_1^1 v
jedem Strahle der Kongruenz in zwei reellen Punkten M, N geschnitten[21]
Die einem dieser Punkte — etwa M — in Σ_1, Σ_{-1} entsprechend
Ebenen μ_1, μ_{-1} gehen durch eine mit M inzidente Gerade $\mathfrak{m}$. Durch
gehen auch die jedem Punkte von $\mathfrak{m}$ in Σ_1, Σ_{-1} entsprechenden Ebene
Da die Gerade $\mathfrak{m}$ kein Deckstrahl der korrelativen Räume Σ, Σ_1 u
Σ, Σ_{-1} sein kann, so ist sie eine Tangente von P_i^2 in M und als solch
mit der reziproken Polare p_i von p für P_i^2, d. h. mit dem p zugeordnet
Strahle p_i von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ inzident. In den Ebenen μ_1, μ_{-1} sind ab

[20]) Jolles, a. a. O., Nr. 13.

[21]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenko
gruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **134** (1908), Nr. 16.

zw. die p in Σ, Σ_{-1} entsprechenden Strahlen p_1, p_{-1} von C_1^1 enthalten, lglich schneiden auch p_1, p_{-1} die Gerade $\mathfrak{m}$ und die vier Strahlen $, p_1, p_i, p_{-1}$ liegen in einer Regelschar zweiter Ordnung der linearen trahlenkongruenz C_1^1.

Eine gegebene Ebene σ schneidet nun die ihrem ebenen Felde in $_1, \Sigma_{-1}$ entsprechenden zentrischen Bündel S_1, S_{-1} in den zu σ invers orrelativen Feldern σ_1, σ_{-1}. Geht insbesondere die Ebene durch den trahl p von C_1^1, so liegt auf p derjenige Punkt G, dem in σ_1 und σ_{-1} er nämliche nicht mit G inzidente Strahl g doppelt entspricht. Der trahl g fällt, da er die p in σ_1 und σ_{-1} entsprechenden Punkte enthält nd also mit p_1 und p_{-1} inzident ist, in den mit σ inzidenten Leitstrahl er Regelschar zweiter Ordnung $p\, p_1\, p_{-1}$. Der in der Ebene der korre- tiven Felder σ, σ_1 und σ, σ_{-1} gelegene Kegelschnitt s_i^2 der Punktinzidenz- äche P_i^2 der korrelativen Räume Σ, Σ_1 und Σ, Σ_{-1} ist die gemeinsame unktinzidenzkurve jener korrelativen Felder. Sie ist reell und geht urch die Schnittpunkte M, N von p mit P_i^2. Die Punktinzidenzkurve $_i^2$ zerfällt, wenn ihre Ebene die Fläche P_i^2 berührt, und das schließen ir aus. In σ_1, σ_{-1} entsprechen dem Punkte M die mit ihm inzidenten eraden $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_{-1}$. Diese Geraden sind[22]) harmonisch getrennt durch p und ie Tangente m von s_i^2 in M und liegen in den M in Σ_1 und Σ_{-1} ntsprechenden Ebenen μ_1, μ_{-1}. Mit μ_1, μ_{-1} sind aber bzw. die p in Σ_1 nd Σ_{-1} entsprechenden Strahlen p_1, p_{-1} von C_1^1 inzident. Ferner schneiden inander μ_1, μ_{-1} nach obigem in der Tangente $\mathfrak{m}$ von P_i^2 in M. End- ch liegt p_i als reziproke Polare von p für P_i^2 mit $\mathfrak{m}$ in der Tangentialebene μ on P_i^2 in M. Folglich wird aus $\mathfrak{m}$ der Strahlenwurf $p\, p_1\, p_i\, p_{-1}$ der egelschar zweiter Ordnung $p\, p_1\, p_{-1}$ durch den harmonischen Ebenen- urf $\mathfrak{m}$ $(\sigma\, \mu_1\, \mu\, \mu_{-1})$ projiziert. Also auch bei der elliptischen windschief nvolutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ trennt in C_1^1 das trahlenpaar p, p_i die p in Σ_1, Σ_{-1} entsprechenden Strahlen p_1, p_{-1} armonisch.

12. Zwei zum Raume Σ invers korrelative, also zueinander kollineare äume Σ_1, Σ_{-1} erzeugen einen tetraedralen Strahlenkomplex. Einem egebenen Punkte P von Σ sei der Strahl $\mathfrak{p}$ des Komplexes „zugeordnet", er mit den P in Σ_1 und Σ_{-1} entsprechenden Ebenen inzident ist. Die en Punkten von $\mathfrak{p}$ zugeordneten Komplexstrahlen bilden den von P usstrahlenden Komplexkegel zweiter Ordnung. Ebenso sei einer gegebenen bene ϱ von Σ der Komplexstrahl $\mathfrak{r}$ „zugeordnet", der die ϱ in Σ_1 und $_{-1}$ entsprechenden Punkte R_1, R_{-1} verbindet. Die den Ebenen von $\mathfrak{r}$ n Komplexe zugeordneten Strahlen bilden den Komplexstrahlenbüschel

[22]) Schröter, a. a. O., Nr. 2.

zweiter Ordnung von ϱ. Der dem Punkte P zugeordnete Komplexstrahl ist mit dem P in den korrelativen Räumen Σ, Σ_1 zugeordneten Wechselpunkte P' inzident und der dem Punkte P' von Σ zugeordnete Komplexstrahl $\mathfrak{p}'$ mit P. Zwei Komplexstrahlen, denen zwei Wechselpunkte der korrelativen Räume Σ, Σ_1 zugeordnet sind, mögen „Punktwechselstrahlen von Σ, Σ_1 heißen, zwei Komplexstrahlen, denen zwei Wechselebenen von Σ, Σ_1 zugeordnet sind, „Ebenenwechselstrahlen" der Räume[23]).

Es sei nun die Korrelation ψ_1 von Σ_1, Σ_{-1} dadurch bestimmt, daß sie die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst überführt, deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe läßt, und dem Punkte P die Ebene π_1 zuweist. Dann entsprechen in Σ_1, Σ_{-1} dem mit P inzidenten Strahle p von C_1^1 bzw. die Strahlen p_1, p_{-1} der Kongruenz, die in den P bzw. entsprechenden Ebenen π_1, π_{-1} von Σ_1, Σ_{-1} liegen. Die Gerade $\pi_1 \pi_{-1}$ ist aber der zugeordnete Strahl $\mathfrak{p}$ in dem von Σ_1, Σ_{-1} erzeugten tetraedralen Komplexe. Folglich ist $\mathfrak{p}$ ein Leitstrahl der Regelschar zweiter Ordnung $pp_1 p_{-1}$ und da in dieser Regelschar auch der p in $C_1^1(aa_i, ss_i)$ zugeordnete Strahl p_i liegt (**11.**), mit p_i inzident. Der die Strahlen $\mathfrak{p}$ umfassende tetraedrale Strahlenkomplex ist hiernach speziell, ein tetraedraler Strahlenkomplex Γ_i^2 (**5.**). Also:

Führen die Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} der zum Raume Σ invers korrelativen Räume Σ_1, Σ_{-1} die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst über und lassen sie dabei dere (reelle oder konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe, so erzeuge die durch die Kollineation ψ_1^{-2} aufeinander bezogenen Räume Σ_1, Σ_{-1} einen speziellen tetraedralen Strahlenkomplex Γ_i^2. Der einem gegebene Punkte P von Σ zugeordnete Strahl $\mathfrak{p}$ von Γ_i^2 schneidet, außer den mit P inzidenten Strahl p von C_1^1, die p in Σ_1 und Σ_{-1} entsprechende Strahlen p_1, p_{-1} und den p in $C_1^1(aa_i, ss_i)$ zugeordneten Strahl p_i. Ebenso ist der einer gegebenen Ebene ϱ von Σ zugeordnete Strahl von Γ_i^2 inzident mit dem in ϱ liegenden Strahle r von C_1^1, mit dem in Σ_1 und Σ_{-1} entsprechenden Strahlen r_1, r_{-1} und mit dem r in $C_1^1(aa_i, ss_i)$ zugeordneten Strahle r_i. Die beiden Strahlenwürfe $pp_1 p_i p_{-1}$ und $rr_1 r_i r_{-1}$ sind harmonisch (**11.**).

---

[23]) Die Theorie der Wechselpunkte und ebenso der Wechselstrahlen als *paarweise* einander zugeordnete Gebilde zweier kollokalen korrelativen Felder hat Seydewitz begründet. Ihm sind die Bezeichnungen: Wechselpunkte, Wechselebenen, Punkt- und Ebenenwechselstrahlen für zwei korrelative Räume nachgebildet. Es wirkt irreführend, wenn Schröter in zwei korrelativen Räumen Σ, Σ_1 (a. a. O., Nr. 11) *eine* Strahl — den einem gegebenen Punkte P zugeordneten Strahl $\mathfrak{p}$ — als Wechselstrahl bezeichnet.

Die Leitschar jeder Regelschar zweiter Ordnung der linearen Strahlengruenz C_1^1, die einen Strahl x von C_1^1 und die x in Σ_1 und Σ_{-1} entsprechenden Kongruenzstrahlen x_1, x_{-1} enthält, ist im tetraedralen Komplexe Γ_i^2 enthalten. Jeder Strahl von Γ_i^2 liegt in einer dieser ∞^2 Regelscharen zweiter Ordnung. Die ∞^2 Regelscharen zweiter Ordnung selbst liegen gleichzeitig im F^2-Systeme und im Φ^2-Gewebe des speziellen tetraedralen Strahlenkomplexes Γ_i^2; durch jedes Strahlenpaar von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ gehen zwei. Da die Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} die lineare Strahlenkongruenz in sich selbst überführen, so führt die Kollineation des geschart intransitiven Raumes von C_1^1 die Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1}, die Kollineation und den tetraedralen Strahlenkomplex Γ_i^2 in sich selbst über.

13. Durch die Räume Σ_1, Σ_{-1}, die bzw. durch die inversen Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} auf den Raum Σ und durch die Kollineation ψ_1^{-2} aufeinander bezogen sind, geht ein Büschel kollinearer Räume $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$. Führt bei die Korrelation ψ_1 die windschief involutorische lineare Strahlengruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst über, daß deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in Ruhe bleiben, bleiben je zwei einander zugeordnete Strahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ reziproke Polaren in den polaren Räumen der Flächen des F^2-Büschels $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d})$, dessen Basiskurve das einfache Raumvierseit $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ ist[5]). Korrelation ψ_1 führt also den polaren Raum jeder Fläche des Büschels $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d})$ wiederum in den polaren Raum einer Fläche dieses Büchels über. Für die polare Korrelation $\chi_\varkappa$ eines solchen Raumes gilt hiernach die Beziehung:

$$\psi_1^{-1} \chi_\varkappa \psi_1 = \chi_\lambda ,$$

wo der χ_λ ebenfalls die Korrelation des polaren Raumes einer Fläche des Büschels $F^2(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d})$ ist. Aus ihr folgt:

$$\psi_1^{-2} \chi_\varkappa \psi_1 = \psi_1^{-1} \chi_\lambda ,$$

und daraus:

$$\psi_1^{-2} \chi_\varkappa \psi_1^2 = \psi_1^{-1} \chi_\lambda \psi_1 .$$

Nach (α) verwandelt aber ψ_1 auch χ_λ in die Korrelation χ_ϱ des polaren Raumes einer Fläche des Büschels $F^2(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d})$. Folglich führt die Kollineation ψ_1^{-2} der Räume Σ_1, Σ_{-1}, und somit jede Kollineation zweier Räume des Büschels $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$, die windschief involutorische lineare Strahlengruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst über, daß deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben. Kurz:

Sind die Räume Σ_1, Σ_{-1} bzw. durch die inversen Korrelationen ψ_1^{-1} auf den Raum Σ und also durch die Kollineation ψ_1^{-2} aufeinander bezogen, und transformiert ψ_1 die windschief involutorische lineare Strahlen-

kongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst, daß deren (reelle oder p
weise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben, so gilt
gleiche von jeder Kollineation zweier Räume des Σ_1, Σ_{-1} verbinde
Büschels kollinearer Räume $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$.

Die Kollineation zweier Räume des Büschels $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ verwan
den polaren Raum jeder Fläche des F^2-Büschels $F^3(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d})$ in den
laren Raum einer Fläche des nämlichen Büschels.

14. Jeder Raum des Büschels kollinearer Räume $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$, der
zum Raume Σ invers korrelativen Räume Σ_1, Σ_{-1} verbindet, ist z
korrelativ. Die einen Raum Σ_m des Büschels $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ auf Σ beziehe
Korrelation ψ_m resultiert aus der Σ_m auf Σ_1 beziehenden Kollineation
und der Σ_1 auf Σ beziehenden Korrelation ψ_1 als:

$$(\alpha) \qquad \psi_m = \varphi_m \psi_1,$$

woraus sich:

$$(\beta) \qquad \psi_m^{-1} = \psi_1^{-1} \varphi_m^{-1}$$

ergibt. Führt aber die Korrelation ψ_1 die windschief involutorische line
Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst über, und läßt sie d
deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$,
in Ruhe, so verwandelt die Kollineation φ_m die Korrelation χ_ϱ des
laren Raumes einer Fläche des F^2-Büschels $F^3(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d})$ mit dem Bs
vierseit $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ wiederum (**13.**) in die Korrelation χ_σ des polaren Rau
einer Fläche von $F^3(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d})$. Also folgt:

$$(\gamma) \qquad \varphi_m^{-1} \chi_\varrho \varphi_m = \chi_\sigma.$$

Da nach (α) und (β):

$$\varphi_m = \psi_m \psi_1^{-1} \quad \text{und} \quad \varphi_m^{-1} = \psi_1 \psi_m^{-1}$$

ist, liefert (γ):

$$\psi_1 \psi_m^{-1} \chi_\varrho \psi_m \psi_1^{-1} = \chi_\sigma,$$

und diese Gleichung endlich:

$$\psi_m^{-1} \chi_\varrho \psi_m = \psi_1^{-1} \chi_\sigma \psi_1.$$

Aber die Korrelation ψ_1 transformiert, wie schon hervorgehoben wur
die Korrelation χ_σ des polaren Raumes einer Fläche des Büschels $F^3(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}$
stets in die Korrelation χ_τ einer Fläche des nämlichen Büschels. Somit i

$$\psi_m^{-1} \chi_\varrho \psi_m = \chi_\tau.$$

Die Korrelation ψ_m transformiert demnach, ebenso wie die Korrelation
die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in s

ost und läßt deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppel-
ahlen in Ruhe. Also schließen wir:

*Sind in dem Büschel kollinearer Räume $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ die Räume Σ_1, Σ_{-1}
. durch die inversen Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} auf den Raum Σ bezogen,
n ist jeder Raum Σ_x von $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ durch eine Korrelation ψ_x auf Σ
ogen, die aus der Σ_x auf Σ_1 beziehenden Kollineation φ_x und aus ψ_1
$\varphi_x \psi_1$ resultiert. Transformiert dabei ψ_1 die windschief involutorische
eare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst, daß deren (reelle
r paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben,
gilt gleiches für jede der Korrelationen ψ_x.*

15. In den bzw. durch die inversen Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} auf Σ be-
enen Räumen Σ_1, Σ_{-1}, deren Korrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} die windschief involu-
ische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst überführen,
3 deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe
iben, entsprechen (**11.**) einem Strahle p von C_1^1 die durch das Strahlen-
r p, p_i von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ harmonisch getrennten Strahlen p_1, p_{-1}. Die
r harmonischen Strahlen p, p_1, p_i, p_{-1} liegen in einer Regelschar zweiter
dnung $\mathfrak{P}^2$ von C_1^1. Die Leitschar von $\mathfrak{P}^2$ besteht als Erzeugnis der ho-
logen Ebenenbüschel p_1, p_{-1} von Σ_1, Σ_{-1} aus Strahlen (**12.**) des von
, Σ_{-1} erzeugten speziellen tetraedralen Strahlenkomplexes Γ_i^2, die Regel-
ar $\mathfrak{P}^2$ also aus dem Strahle p_1 und der Gesamtheit aller p_1 in den
igen Räumen Σ_x des Büschels $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ entsprechenden Strahlen. Durch
Korrelationen ψ_1, ..., ψ_x, ..., welche die Räume Σ_1, ..., Σ_x, ...
Σ beziehen, sind dem Strahle p die Strahlen von $\mathfrak{P}^2$ in den Räumen
, ..., Σ_x, ... zugewiesen. Diese Korrelationen führen (**14.**) die wind-
ief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ so in sich
ost über, daß deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppel-
ahlen in Ruhe bleiben. Also entsprechen in den Räumen Σ_{-x}, die durch
zu den Korrelationen ψ_x inversen Korrelationen ψ_x^{-1} auf Σ bezogen
rden, dem Strahle p die Strahlen p_{-x}, die in der Regelschar $\mathfrak{P}^2$ durch
harmonischen Würfe $p\,p_x\,p_i\,p_{-x}$ bestimmt sind. Für eine dieser Kor-
ationen, der Korrelation ψ_0, muß $p \equiv p_0 \equiv p_{-0}$ sein. ψ_0 führt p in
selbst über, gleichgültig welcher Strahl von C_1^1 unter p verstanden
d. Eine Korrelation aber, welche jeden Strahl der linearen Kongruenz
in sich selbst überführt, ist eine Nullkorrelation. Für eine zweite ψ_i
ser Korrelationen muß $p \equiv p_i \equiv p_{-i}$ sein, welchen Strahl von C_1^1 man
h als Strahl p wählen mag. Diese Korrelation vertauscht die Strahlen
C_1^1 paarweise miteinander und ist folglich polar[24]). Die Kollineation

[24]) Reye, Mathem. Zeitschr. 8 (1920), S. 93.

ψ_0^{-2} der Räume Σ_0, Σ_{-0} ist identisch involutorisch, die Kollineation der Räume Σ_i, Σ_{-i} partiell involutorisch.

Da der Büschel kollinearer Räume $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ zwei zueinander par involutorische Räume Σ_i, Σ_{-i} enthält, so ist er speziell (4.), und da Strahlen $p_0 \equiv p$ und p_i von Σ_0 und Σ_i die Strahlenpaare $p_1; p_{-1}$; $p_i, p_{-i}; \ldots$ harmonisch trennen, so sind die kollinearen Räume Σ_1, Σ_{-1}; $\Sigma_i, \Sigma_{-i}; \ldots$, die durch die inversen Korrelationen $\psi_1, \psi_{-1}; \ldots; \psi_i, \psi_{-i}$; auf Σ bezogen sind, partiell invers zum Grundraume $\bar{\Sigma} \equiv \Sigma_0$ des Büsc $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$. Somit ist bewiesen:

In einem Büschel kollinearer Räume mit zwei zu einem Raum invers korrelativen Räumen Σ_1, Σ_{-1} sind auch die übrigen Räume pa weise zu Σ invers korrelativ. Einem gegebenen Punkte P von Σ ist je zwei zu Σ invers korrelative Räume dieses Büschels $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ ders Strahl $\mathfrak{p}$ des speziellen tetraedralen Komplexes Γ_i^2 zugeordnet, den je z Räume von $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ erzeugen. Je zwei zu Σ invers korrelative Räu Σ_x, Σ_{-x} des Büschels bestimmen mit Σ dasselbe Wechselpunktsystem $[\Sigma\,\Sigma_x]$ Der Büschel $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ ist speziell; er enthält einen zu seinem Gru raume $\bar{\Sigma}$ partiell involutorischen Raum Σ_i. Je zwei zu Σ invers l relative Räume von $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ sind zu $\bar{\Sigma}$ partiell invers kollinear. zu $\bar{\Sigma}$ invers kollinearen Räume von $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ sind die Elementenpa einer hyperbolischen Involution, deren Doppelräume der zu $\bar{\Sigma}$ identi involutorische Raum Σ_0 und der zu $\bar{\Sigma}$ partiell involutorische Raum des Büschels sind (4.). Der Raum Σ bildet mit dem zu ihm korrelati Raume Σ_0 einen Nullraum N_0 und mit dem zu ihm korrelativen Raume einen polaren Raum Π_i. Die den Punkten des Raumes Σ in N_0 und zugeordneten Ebenen bilden zwei kollineare Ebenenräume, die den te edralen Strahlenkomplex Γ_i^2 erzeugen. Jedes Strahlenpaar der windsch involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$, die durch Korrelationen zwischen den Räumen Σ_1, Σ_{-1} und dem Raum Σ so sich selbst übergeführt wird, daß ihre (reellen oder paarweise konjug imaginären) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben, besteht aus zwei rezipro Polaren von Π_i. In Π_i verbindet die Polarebene eines gegebenen Punkte den P im Wechselpunktsysteme $[\Sigma\,\Sigma_1]^3$ zugeordneten Punkt P' mit Polare p_i des mit P inzidenten Strahles p von C_1^1. Alle Strahlen C_1^1 sind Nullstrahlen im Nullraume N_0.

Die Inzidenzfläche des polaren Raumes Π_i wird von den Punkten vo gebildet, die mit den ihnen entsprechenden Ebenen in den zu Σ korrelati Räumen des Büschels $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ incident sind. Sie ist also die gemeins Punktinzidenzfläche und der polare Raum Π_i der gemeinsame „polare Pu inzidenzraum" der korrelativen Räume $\Sigma, \Sigma_1; \ldots; \Sigma, \Sigma_i; \ldots; \Sigma, \Sigma_x;$

Der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 als Gebilde von $\bar{\Sigma}$ entsprechen in
n übrigen Räumen des Büschels $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ lineare Strahlenkongruenzen,
mit C_1^1 einen speziellen Büschel projektiver linearer Strahlenkongruenzen
der charakteristischen Involution $C_1^1(aa_i, ss_i)$ bilden (6.). Je zwei
Σ invers korrelative Räume $\Sigma_1, \Sigma_{-1}; \ldots; \Sigma_m, \Sigma_{-m}; \ldots$ von $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$
halten dabei stets zwei C_1^1 entsprechende, durch C_1^1 und $C_1^1(aa_i, ss_i)$
rmonisch getrennte projektive lineare Kongruenzen.

16. Einem Punkte P des Raumes Σ entsprechen in den zu Σ invers
relativen Räumen Σ_1, Σ_{-1} die Ebenen π_1, π_{-1}, die einander in dem P
geordneten Strahle $\mathfrak{p}$ des speziellen tetraedralen Strahlenkomplexes Γ_i^2
neiden (12.). Die Punktreihe jedes mit $\mathfrak{p}$ inzidenten Strahles des
nktes P liegt also zu den ihr in Σ_1 und Σ_{-1} entsprechenden Ebenen-
scheln involutorisch, und somit ist die Ebene $P\mathfrak{p}$ die Nullebene π_0 von P
Nullraume (9.) des linearen Strahlenkomplexes Γ_0. Die Ebene π_0
t aber mit der P im Nullraume N_0 zugeordneten Ebene zusammen (15.).
glich hat der lineare Strahlenkomplex den Nullraum N_0. Außer π_1, π_{-1}
neiden einander in $\mathfrak{p}$ die Ebenen, die P in je zwei zu Σ invers kor-
ativen Räumen des Büschels $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ entsprechen. Demnach ergibt sich:

Sind die Räume Σ_1, Σ_{-1}, und folglich auch paarweise die übrigen
ume des Büschels $\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$, zu einem Raume Σ invers korrelativ, so
den die Punktreihen erster Ordnung von Σ, die zu den ihnen ent-
rechenden Ebenenbüscheln in je zwei zu Σ invers korrelativen Räumen
$\Sigma_1\,\Sigma_{-1}$ involutorisch liegen, denselben linearen Strahlenkomplex Γ_0.

Den Punkten eines Strahles s von Γ_0 sind in dem tetraedralen
mplexe Γ_i^2 die Strahlen $\mathfrak{f}$ einer zur Punktreihe s projektiven Regelschar
zugeordnet. Der Strahl s ist ein Leitstrahl von $\mathfrak{S}^2$ und die zur
nktreihe s projektive Regelschar $\mathfrak{S}^3$ liegt zu ihr involutorisch. Also gilt:

Die Ebenenbüschel erster Ordnung s_x, s_{-x}, die der Punktreihe auf
em Strahle s des linearen Komplexes Γ_0 in je zwei zum Raume Σ
ers korrelativen Räumen Σ_x, Σ_{-x} entsprechen, liegen stets zur nämlichen
nktinvolution auf s involutorisch.

17. $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sei eine in einem polaren Raume Ψ enthaltene
dschief involutorische lineare Strahlenkongruenz und P, P' ein Paar
jugierter Punkte von Ψ auf einem gegebenen Strahle p von C_1^1. Dann
t es nur eine die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz
(aa_i, ss_i) in sich selbst überführende Korrelation ψ_1, die deren Doppel-
hlen in Ruhe läßt und dabei dem Punkte P eine gegebene mit P'
dente Ebene π_1 zuweist (7.). Die durch ψ_1 aufeinander bezogenen
relativen Räume Σ, Σ_1 bestimmen ein Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$. Es
t in einem polaren Raume Π_i, der die windschief involutorische lineare

Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ enthält und dessen Korrelation dem Punkt P die Ebene π_i zuordnet, die den P in $[\Sigma\Sigma_1]^3$ zugeordneten Wechselpunkt P' mit der reziproken Polare p_i von p in Π_i verbindet (15). p_i ist aber die gemeinsame reziproke Polare von p und $\pi_i \equiv \pi_\psi$ also gemeinsame Polarebene von P in den polaren Räumen Ψ und Π_i. Zu polare Räume, die ein und dieselbe windschief involutorische lineare Strahlkongruenz enthalten und einem gegebenen Punkte dieselbe Polarebene zuweisen, sind aber identisch[25]). Die Involutionen konjugierter Punkte von Ψ auf den Strahlen der linearen Kongruenz C_1^1 bilden sonach ein Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ der korrelativen Räume Σ, Σ_1. Beschreibt π_1 den zentrischen Bündel P', so ergeben sich ∞^2 zu Σ korrelative Räume, die mit Σ das nämliche Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ bestimmen. Demnach folgt:

Die Gesamtheit aller Paare konjugierter Punkte eines polaren Raumes in deren Träger die Strahlen einer in Ψ enthaltenen windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ sind, darf als das Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ zweier korrelativen Räume Σ, Σ_1 aufgefaßt werden. Das Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ der korrelativen Räume Σ, Σ_1 ist bestimmt durch die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ und durch ein Paar seiner Wechselpunkte. Auf einen Raum Σ können ∞^2 Räume Σ_1 korrelativ so bezogen werden, daß sie mit ihm dasselbe Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ bestimmen. Die ∞^2 zueinander kollinearen Räume Σ_1 bilden einen Bündel.

Im polaren Raume Ψ liegen ∞^4 windschief involutorische lineare Strahlenkongruenzen[26]). Jede bestimmt mit den auf ihren Strahlen enthaltenen Involutionen konjugierter Punkte des polaren Raumes ∞^3 zu Raume Σ korrelative Räume, die mit ihm zum nämlichen Wechselpunktsysteme $[\Sigma\Sigma_1]^3$ führen. Kurz:

∞^6 zu einem Raume Σ korrelative Räume Σ_1 bestimmen mit ihm zusammen denselben polaren Punktinzidenzraum.

18. Durch die Schnittgerade $\mathfrak{p}$ der Ebenen π_1, π_{-1}, die dem Punkt P des Raumes Σ in den zu Σ invers korrelativen Räumen Σ_1, Σ_{-1} entsprechen, geht **(15.)** die Polarebene π_i von P in dem polaren Raume und die Nullebene π_0 von P in dem Nullraume N_0. Beide Ebenen sind die Doppelebenen einer hyperbolischen Ebeneninvolution, deren Elementenpaare aus den Ebenen π_x, π_{-x} bestehen, die dem Punkte P in je zwei

[25]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abt., dritte Aufl., Leipzig 1892, Nr. 5.

[26]) Jolles, Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen. Math. Zeitschr. 13 (1922), Nr. 28.

Σ invers korrelativen Räumen Σ_x, Σ_{-x} des Büschels kollinearer Räume Σ_{-1} entsprechen. Die Schnittgerade $\mathfrak{p}$ der Ebenen π_1, π_{-1} bleibt mit P zugeordneten Wechselpunkte P' inzident, mit welcher Ebene von die Ebene π_1 auch zusammenfallen mag. Beschreibt $\mathfrak{p}$ den Strahlenhel $(P'\pi_i)$, so bleiben die homologen mit P' inzidenten Ebenen der mpaare Σ_x, Σ_{-x} die Ebenenpaare eines perspektiv involutorischen rischen Bündels P' mit der Involutionsebene π_i und der Involutionse $PP' \equiv \mathfrak{p}$. Der Bündel kollinearer Räume **(17.)**, den die zu einem me Σ korrelativen Räume Σ_x bilden, die mit ihm dasselbe Wechselktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ bestimmen, wird folglich „perspektiv" involutorisch, n man je zwei zu Σ invers korrelative Räume Σ_x, Σ_{-x} einander zuhet. Sonach schließen wir:

Alle zu einem Raume Σ invers korrelativen Räume Σ_x, Σ_{-x}, die ihm das nämliche Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ bestimmen, sind die mentenpaare eines perspektiv involutorischen Bündels kollinearer Räume. n „Involutionsraum" ist zu Σ polar korrelativ. Seine Doppelräume en einen Büschel, und jeder von ihnen ist zu Σ nullkorrelativ. Die aren Komplexe dieser Nullräume schneiden einander in der linearen ngruenz C_1^1, deren Strahlen die Punktepaare von $[\Sigma\Sigma_1]^3$ tragen. Jeder spektiv involutorische zentrische Bündel P', der zum perspektiv involuschen Bündel kollinearer Räume selbst perspektiv ist, hat den mit em Mittelpunkte P' inzidenten Strahl p von C_1^1 zur Involutionsachse; e Involutionsebene ist die Polarebene π_i des P' in $[\Sigma\Sigma_1]^3$ zugeordneten nktes P im polaren Raume Π_i, den der Involutionsraum des involuschen Bündels kollinearer Räume mit dem zu ihm korrelativen Raume ildet.

19. Außer durch einen Büschel können die durch die inversen rrelationen ψ_1, ψ_1^{-1} auf den Raum Σ und durch die Kollineation ψ_1^{-2} einander bezogenen Räume Σ_1, Σ_{-1} durch eine Schar kollinearer Räume ounden werden; je zwei Räume beider Gebilde erzeugen **(12.)** wiederum ern speziellen tetraedralen Strahlenkomplex Γ_i^2. Die Kollineation je ier Räume der Schar transformiert die windschief involutorische lineare ahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst, daß deren (reelle oder rweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben **(13.)**. Das che leisten die Korrelationen, welche die Räume der Schar auf Σ beziehen .). Außer Σ_1, Σ_{-1} sind auch die übrigen Räume der Schar paarweise Σ invers korrelativ **(15.)**. Einer gegebenen Ebene ϱ von Σ ist für je zwei Σ invers korrelative Räume der Schar derselbe Strahl r des tetraedralen ahlenkomplexes Γ_i^2 zugeordnet. Je zwei Räume der Schar bestimmen mit Σ dasselbe Wechselebenensystem $[\Sigma\Sigma_1]^{III}$. Die Schar ist speziell, enthält einen zu ihrem Grundraume $\bar{\Sigma}'$ partiell involutorischen Raum Σ_J.

Je zwei ihrer zu Σ invers korrelativen Räume sind zu $\bar{\Sigma}'$ partiell invers. zu $\bar{\Sigma}'$ partiell inversen Räume bilden die Elementenpaare einer hyperbolisc Involution, deren Doppelräume der zu $\bar{\Sigma}'$ identisch involutorische Ra Σ_0 und Σ_J sind. Der Raum Σ bildet mit den zu ihm korrelativen Räun Σ_0 und Σ_J bzw. einen Nullraum N_0' und einen polaren Raum Π_J. Die Ebenen von Σ in N_0' und Π_J zugeordneten Punkte bilden zwei kolline den speziellen tetraedralen Strahlenkomplex Γ_i^2 erzeugende Punktträu In Π_J liegt die windschief involutorische lineare Strahlenkongru $C_1^1(aa_i, ss_i)$, im linearen Komplexe von N_0' die lineare Strahlenkongru C_1^1 selbst. Der lineare Strahlenkomplex von N_0' und der in **9** erwäh lineare Strahlenkomplex Γ_0' sind identisch. Die Punktreihen s_x, die d von einem Strahle s von Γ_0' ausgehenden Ebenenbüschel in den zu korrelativen Räumen Σ_x der Schar $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ entsprechen und zum Eben büschel s involutorisch liegen, liegen alle zur nämlichen Ebeneninvolut in s perspektiv **(16.)**. Die Inzidenzfläche des polaren Raumes Π_J w von den Ebenen des Raumes Σ umhüllt, die mit den ihnen entsprechend Punkten in den zu Σ korrelativen Räumen der Schar $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$ inzid sind. Sie ist also **(15.)** die gemeinsame Ebeneninzidenzfläche und Π_J gemeinsame „polare Ebeneninzidenzraum" von ∞^1 Paaren korrelativ Räume, bestehend aus Σ und je einem Raume der Schar $\Sigma_1 \Sigma_{-1}$. Gesamtheit aller Paare konjugierter Ebenen eines polaren Raumes Ψ', von den Strahlen einer windschief involutorischen linearen Strahlenkongrue $C_1^1(aa_i, ss_i)$ von Ψ' getragen werden, kann als das Wechselebenensyste $[\Sigma\Sigma_1]^{III}$ zweier korrelativen Räume Σ, Σ_1 aufgefaßt werden **(17.)**. ist bestimmt durch $C_1^1(aa_i, ss_i)$ und durch ein Paar Wechselebene Auf einen Raum Σ können die ∞^3 Räume eines Heeres von Räumen bezogen werden, daß sie mit ihm dasselbe Wechselebenensystem bestimme Die zu Σ invers korrelativen Räume des Heeres bilden die Elemente paare einer perspektiv involutorischen Kollineation **(18.)**. ∞^6 zu eine Raume Σ korrelative Räume bestimmen mit ihm den nämlichen polar Ebeneninzidenzraum **(17.)**.

20. Führt die Korrelation ψ_1 zweier Räume Σ, Σ_1 die windschi involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ in sich selbst üb und läßt sie dabei deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginär Doppelstrahlen in Ruhe, so entspricht dem Verbindungsstrahle p zwei gegebenen Wechselpunkte von Σ, Σ_1 als Strahl von C_1^1 in Σ_1 ebenfalls e Strahl p_1 dieser Kongruenz. Die Korrelation ψ_1 weist also den Punkt P, P' von Σ bzw. die Ebenen $p_1 P'$ und $p_1 P$ zu. Nun ist die der Ebe $P p_1$ zugeordnete Wechselebene von Σ, Σ_1 gleichfalls mit p_1 und inzident **(19.)**, folglich fällt sie mit der Ebene $P' p_1$ zusammen. Korrelation ψ_1 verwandelt somit das Wechselpunktsystem $[\Sigma\Sigma_1]^3$ d

korrelativen Räume Σ, Σ_1 in deren Wechselebenensystem $[\Sigma\Sigma_1]^{III}$ Ein gleiches gilt von der Korrelation ψ_1^{-1}.

Je zwei Wechselpunkte von Σ, Σ_1 sind in dem polaren Punktinzidenzraume Π_i von Σ, Σ_1 konjugiert, je zwei Wechselebenen von Σ, Σ_1 in dem polaren Raume Π_{i1}, in den Π_i durch ψ_1 transformiert wird. Beide polaren Räume enthalten die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$. Nun enthält aber der polare Ebeneninzidenzraum Π_J ebenfalls diese windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz und ist hierdurch und durch je zwei seiner Wechselebenen bestimmt **(19.)**. Folglich sind Π_{i1} und Π_J identisch, d. h. es gilt der Satz:

Der polare Punktinzidenzraum Π_i zweier durch die Korrelation ψ_1 aufeinander bezogenen Räume Σ, Σ_1 geht sowohl durch ψ_1 wie durch ψ_1^{-1} in den polaren Ebeneninzidenzraum Π_J von Σ, Σ_1 über. Je zwei Wechselpunkte von Σ, Σ_1 bestimmen zwei Paare Wechselebenen dieser Räume, die zu ihnen perspektiv sind.

21. Der polare Punktinzidenzraum Π_i zweier korrelativen Räume Σ, Σ_1 enthält ebenso wie ihr polarer Ebeneninzidenzraum Π_J die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$, die von der Korrelation ψ_1 von Σ, Σ_1 so in sich selbst übergeführt wird, daß dabei deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben **(15. und 19.)**. Die Inzidenzflächen P_i^2 und P_J^2 beider polaren Räume schneiden einander also in dem von den Doppelstrahlen von $C_1^1(aa_i, ss_i)$ gebildeten einfachen Raumvierseit und haben dessen Diagonalen u, v — die reellen oder konjugiert imaginären Leitgeraden von C_1^1 — zu gemeinsamen reziproken Polaren. Bei der Durchdringung der Inzidenzfläche P_i^2 des polaren Punktinzidenzraumes Π_i mit der Inzidenzfläche P_J^2 des polaren Ebeneninzidenzraumes Π_J^2 der korrelativen Räume Σ, Σ_1 haben wir demnach folgende vier Fälle zu unterscheiden:

Ist die windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$

a) eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz erster Art, so sind die Flächen P_i^2 und P_J^2 reelle Regelflächen zweiten Grades, die ein reelles Raumvierseit gemein haben;

b) eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz zweiter Art, so sind die Flächen P_i^2 und P_J^2 entweder zwei reelle Regelflächen oder zwei imaginäre Flächen zweiten Grades, die einander in einem von zwei Paaren konjugiert imaginärer Geraden zweiter Art gebildeten Raumvierseit schneiden;

c) eine hyperbolische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz dritter Art, so sind die Flächen P_i^2 und P_J^2 zwei reelle strahlenlose Flächen zweiten Grades, die einander in einem Raumvierseit durch-

dringen, das aus zwei Paaren konjugiert imaginärer Geraden erster Art besteht;

d) eine elliptische windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz, so sind die Flächen P_i^2 und P_j^2 zwei reelle Regelflächen zweiten Grades, deren Schnittkurve ein Raumvierseit mit zwei reellen und zwei konjugiert imaginären windschiefen Seiten ist.

In den ersten drei Fällen ist das sich selbst entsprechende Tetraeder der zwei korrelativen Räume Σ, Σ_1 bzw. ein hyperbolisches Tetraeder erster, zweiter oder dritter Art, im letzten Falle ein elliptisches Tetraeder (**9.**). Eine Korrelation ψ_1 zweier Räume Σ, Σ_1 ist nun bestimmt, sobald sie einem gegebenen Punkte P von Σ eine gegebene Ebene π_1 von Σ_1 zuweist und eine windschief involutorische lineare Strahlenkongruenz $C_1^1(aa_i, ss_i)$ so in sich selbst überführt, daß deren (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelstrahlen in Ruhe bleiben (**7.**). Je nachdem $C_1^1(aa_i, ss_i)$ hyperbolisch erster, zweiter oder dritter Art oder elliptisch ist, bezieht somit ψ_1 zwei Räume Σ, Σ_1 korrelativ so aufeinander, daß die Durchdringung ihrer beiden Inzidenzflächen bzw. dem Falle a), b), c) oder d) entspricht.

Berlin-Halensee, den 5. Oktober 1921.

(Eingegangen am 4. November 1921.)

Flächen mit geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen.

Von

Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

---

1. Vorbemerkungen. Soviel mir bekannt, hat man sich noch nicht mit den Flächen beschäftigt, auf denen es konjugierte Kurvennetze von der besonderen Art gibt, daß sie sich bei geeigneter Projektion auf eine Ebene geradlinig abbilden. Da der Begriff des Konjugiertseins gegenüber projektiven Transformationen invariant ist, kann man sich auf den Fall beschränken, wo die senkrechte Projektion gewisser konjugierter Kurvennetze auf die xy-Ebene geradlinige Netze liefert. Dieser Umstand erklärt es, daß in den ersten Nummern Betrachtungen angestellt werden, die sich bloß auf ebene Gebilde beziehen. Die Aufgabe, alle Flächen mit einem oder mehreren geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen zu bestimmen, wird im folgenden erledigt. Diese Flächenfamilie ist äußerst mannigfaltig, und es lohnt sich, einzelne Unterarten genauer, namentlich auch in gestaltlicher Hinsicht zu erforschen. Ich bin auf diese Einzelheiten nicht weiter eingegangen.

Man gestatte mir, schon hier in diesen einleitenden Worten auf den gewiß merkwürdigen Satz am Schlusse von Nr. 11 hinzuweisen.

Daß die in dieser Arbeit untersuchten Flächen ein duales Gegenstück zu den Schiebungsflächen sind, wird in der letzten Nummer gezeigt.

In bezug auf die vorkommenden Funktionen werden die in der Differentialgeometrie gebräuchlichen Voraussetzungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit gemacht.

2. Geschlossene Scharen von Punktinvolutionen in der Ebene. Jede Gerade der Ebene sei der Träger einer im allgemeinen nicht ausgearteten Punktinvolution, so daß eine zweifach unendliche Schar von Involutionen vorliegt. Zwei Punkte P und Q mögen einander zugeordnet heißen, sobald sie einander in derjenigen Involution entsprechen,

deren Träger die Gerade PQ ist. Da auf jeder durch P gehenden Ge-
raden ein zu P zugeordneter Punkt liegt, ist jedem Punkt eine einfach
unendliche Schar von Punkten zugeordnet.

Wir greifen nun irgendein zusammengehöriges Paar P, Q heraus und
wählen dann noch irgendeinen unter den zu Q zugeordneten Punkten als
Punkt R aus. Schließlich sei S irgendein zu R zugeordneter Punkt.
Wenn insbesondere stets zu diesem vierten Punkte S wieder der erste
Punkt P zugeordnet ist, soll die Involutionenschar *geschlossen* heißen.
Nebenbei bemerkt ließe sich dies Schließen der Kette nicht erzielen, wenn
man nur Dreiecke PQR statt der Vierecke $PQRS$ bildete, denn man
käme in diesem Falle sofort zu einem Widerspruche, wenn man als dritten
Punkt, wie es ja erlaubt ist, P selbst wählte.

Sogleich werden wir zeigen, daß die Ermittelung aller geschlossenen
Scharen von Punktinvolutionen in der Ebene auf eine andere Aufgabe
hinauskommt, die schon vor Jahren erledigt worden ist.

3. Kurvenscharen in der Ebene, die auf jeder Geraden eine
Involution bestimmen. Da S irgendeiner der zu R zugeordneten
Punkte sein soll und da verlangt wird, daß S auch zu P zugeordnet sei,
sind alle zu P zugeordneten Punkte auch zu R zugeordnet. Daher ordnen
sich alle Punkte der Ebene in zwei Scharen von je einfach unendlich
vielen Kurven k und k' derart an, daß jeder Kurve k der einen Schar
eine Kurve k' der andern entspricht, indem auf k' alle zu irgendeinem
Punkte von k zugeordneten Punkte sowie auf k alle zu irgendeinem
Punkte von k' zugeordneten Punkte liegen. Die Aufgabe, alle geschlossenen
Scharen von Punktinvolutionen zu bestimmen, kommt mithin auf folgende
Aufgabe zurück:

In der Ebene sollen zwei einfach unendliche Kurvenscharen so ermittelt werden, daß jeder Kurve k der einen Schar eine Kurve k' der andern zugeordnet wird, und jede Gerade g soll mit den Kurvenpaaren k, k' solche Punktepaare P, P' gemein haben, die lauter Paare einer Involution auf g ausmachen.

Derartige Kurvenscharen sollen gemeint sein, wenn wir kürzer von
Kurvenscharen reden, die auf jeder Geraden eine Involution bestimmen.

Man schließt leicht rückwärts: Liegen solche Kurvenscharen vor, so
liefern sie auf den Geraden der Ebene Involutionen, die eine geschlossene
Schar im Sinne von Nr. 2 bilden.

4. Einige geschichtliche Bemerkungen. Die von Lie schon
1872 angedeutete, aber erst später vollendete Bestimmung aller Flächen,
die sich auf unendlich viele Weisen als Schiebungsflächen erzeugen lassen,
beruhte auf dem Hilfssatze, nach dem einzig und allein die Kegelschnitt-

büschel solche Kurvenscharen sind, die auf jeder Geraden eine Involution liefern. Daß die Kegelschnittbüschel jede Gerade in einer Involution schneiden, indem immer die Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit der Geraden ein Punktepaar der Involution auf der Geraden ergeben, war ja längst bekannt. Lie hat den Beweis dafür, daß eben nur die Kegelschnittscharen in Betracht kommen, niemals veröffentlicht; er vermochte ihn nämlich späterhin bei seinen Untersuchungen über Schiebungsflächen mit mehrfachen Erzeugungen zu vermeiden. Aber er forderte mich auf, den Satz ganz für sich, losgelöst von seinen Betrachtungen, zu beweisen. Dies tat ich 1892 in den Berichten der mathem.-phys. Klasse der Sächs. Ges. d. Wiss., S. 269—278. In einer Anmerkung auf S. 154 seiner großen Abhandlung: *Die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem*, ebenda 1896, S. 141—178, sprach alsdann Lie die Vermutung aus, daß sich sein Beweis wohl so ziemlich mit meinen Betrachtungen decke. Ob dies zutrifft, muß dahingestellt bleiben, da Lie seinen Beweis auch nicht mündlich bekanntgegeben hat. Auch glaube ich nicht, daß er sich seinerzeit meinen Beweis genauer angesehen hat, denn er ließ sich nicht gern in Einzelheiten fremder Arbeiten ein, es sei denn, daß sie für ihn besonders wichtig waren. In der folgenden Nummer gebe ich meinen Beweis in kürzerer und besserer Form als im Jahre 1892.

5. Ermittelung aller Kurvenscharen, die auf jeder Geraden eine Involution bestimmen. Die Aufgabe ist, zwei einfach unendliche Kurvenscharen in der Ebene so zu ermitteln, daß die Kurven in Paaren k, k' zusammengehören, die auf jeder Geraden der Ebene Punktepaare P, P' haben, die ihrerseits eine Involution auf der Geraden bilden. Diese Involutionen sollen im allgemeinen nicht ausgeartet sein. Offenbar geht jede Lösung der Aufgabe vermöge projektiver Transformation wieder in eine Lösung über. Deshalb dürfen wir bei Benutzung gewöhnlicher rechtwinkliger Punktkoordinaten x, y annehmen, daß die Involutionen auf allen Geraden durch irgendeinen unendlich fernen Punkt[1]) nicht sämtlich einen ihrer Doppelpunkte gerade in diesem unendlich fernen Punkte haben. Zunächst betrachten wir die Punktepaare P, P' auf irgendeiner der Geraden $x = \text{konst.}$ Unter y und y' verstehen wir die Ordinaten der Paare und unter t einen Parameter. Dann sind y und y' die Wurzeln einer gewissen quadratischen Gleichung für y.

$$y^2 - l(x,t)\,y + m(x,t) = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten l und m außer von der Abszisse x der Geraden

[1]) Ich brauche lieber die ausdrucksvolle Bezeichnung „unendlich ferner Punkt" statt der farblosen Benennung „uneigentlicher Punkt", wenn ich auch damit Anstoß erregen sollte.

$x =$ konst. noch von dem Parameter t abhängen. Läßt man t beliebig so soll (1) als Wurzeln die Ordinaten y und y' aller Punktepaare der Involution auf der Geraden $x =$ konst. liefern, d. h. es soll eine Gleichung bestehen von der Form

$$yy' - f(x)(y + y') + h(x) = 0,$$

deren Koeffizienten f und h zwar von x abhängen können, aber von t unabhängig sind. Nach (1) ist $y + y' = l$ und $yy' = m$, so daß also $m = fl - h$ gefordert wird. Einsetzen dieses Wertes in (1) liefert:

$$y^2 - h(x) - l(x,t)[y - f(x)] = 0. \tag{2}$$

Eine Gleichung von dieser Form mit dem Parameter t wird also die analytische Darstellung der Scharen der Kurvenpaare k, k' sein, sobald nur verlangt wird, daß die Kurvenpaare auf jeder Geraden $x =$ konst. eine Involution bestimmen. Dasselbe wird aber auch für jede Gerade in irgendeiner anderen Richtung gefordert. Wir drehen daher das Achsenkreuz um einen beliebigen Winkel α, so daß

$$\xi = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad \eta = x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{3}$$

an die Stelle von x und y treten. Nun ist zu fordern, daß auch in ξ, η statt in x, y eine Gleichung von der Form (2) bestehe; aber dabei dürfen die Koeffizienten auch vom Winkel α abhängen. Mithin treten an die Stelle von $f(x)$, $h(x)$ und $l(x,t)$ gewisse Funktionen $\varphi(\xi,\alpha)$, $\psi(\xi,\alpha)$ und $\lambda(\xi,t,\alpha)$. Also muß die Schar der Kurvenpaare durch eine Gleichung von der Form

$$\eta^2 - \psi(\xi,\alpha) - \lambda(\xi,t,\alpha)\,[\eta - \varphi(\xi,\alpha)] = 0 \tag{4}$$

dargestellt werden, und es handelt sich nun darum, die Funktionen φ, ψ, λ so zu bestimmen, daß diese Gleichung von α unabhängig wird, obwohl α nicht nur als Argument in den Funktionen φ, ψ, λ auftritt, sondern auch ξ und η nach (3) von α abhängig sind, indem

$$\frac{\partial\xi}{\partial\alpha} = -\eta, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = \xi$$

ist. Man hat also zu fordern, daß die durch *vollständige* Differentiation von (4) nach α hervorgehende Gleichung infolge von (4) allein bestehe. Partielle Ableitungen kennzeichnen wir durch den angehängten Index in der gebräuchlichen Weise, so daß also z. B. φ_α die Ableitung von φ nach dem in φ als Argument auftretenden α bedeutet, während α in φ außerdem noch deshalb vorkommt, weil ξ von α abhängt. Die vollständige Differentiation von (4) nach α ergibt nun:

$$2\xi\eta + \eta\psi_\xi - \psi_\alpha + (\eta\lambda_\xi - \lambda_\alpha)(\eta - \varphi) - \lambda(\xi + \eta\varphi_\xi - \varphi_\alpha) = 0.$$

Da diese Gleichung ebenso wie (4) in η quadratisch ist, müssen also die Koeffizienten von η^2, η, η^0 in beiden Gleichungen zueinander proportional sein. Daraus entspringen die beiden einzigen Bedingungsgleichungen der Aufgabe:

$$(5) \qquad \begin{cases} \lambda\lambda_\xi + 2\xi - \lambda_\alpha - \lambda\varphi_\xi - \varphi\lambda_\xi + \psi_\xi = 0, \\ (\lambda\varphi - \psi)\lambda_\xi + \xi\lambda - \lambda\varphi_\alpha - \varphi\lambda_\alpha + \psi_\alpha = 0. \end{cases}$$

Wir werden nun zeigen, daß man infolge von (5) stets annehmen darf, daß λ hinsichtlich des Parameters t linear gebrochen sei.

Durch Differentiation von (5) nach t geht nämlich hervor:

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda_\xi\lambda_t + \lambda\lambda_{\xi t} - \lambda_{t\alpha} - \lambda_t\varphi_\xi - \varphi\lambda_{\xi t} = 0, \\ \lambda_\xi\lambda_t\varphi + (\lambda\varphi - \psi)\lambda_{\xi t} + \xi\lambda_t - \lambda_t\varphi_\alpha - \varphi\lambda_{t\alpha} = 0. \end{cases}$$

Zieht man die mit φ multiplizierte erste Gleichung (6) von der zweiten ab, so kommt:

$$(7) \qquad (\psi - \varphi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\lambda_t = \varphi\varphi_\xi + \xi - \varphi_\alpha,$$

denn die dabei ausgeführte Division mit λ_t ist erlaubt, weil λ offenbar nicht unabhängig von t sein darf. Wäre nun $\psi - \varphi^2 = 0$, so ergäbe (4), daß das allgemeine Kurvenpaar k, k' aus einer mit dem Parameter t veränderlichen und einer festen Kurve $\eta = \varphi$ bestände, so daß alle Involutionen ausgeartet wären. Mithin ist $\psi - \varphi^2$ von Null verschieden, und deshalb lehrt (7), daß die Ableitung von $\ln\lambda_t$ hinsichtlich ξ von t unabhängig ist, also nur von ξ und α abhängt. Daher hat λ selbst die Form

$$(8) \qquad \lambda = u(\xi,\alpha)\,\omega(t,\alpha) + v(\xi,\alpha),$$

indem insbesondere $\omega_t \neq 0$ und $u \neq 0$ ist, weil λ sonst von t unabhängig wäre. Einsetzen dieses Ausdruckes für λ in die erste Gleichung (6) gibt:

$$\frac{\partial\ln\omega_t}{\partial\alpha} = 2\omega u_\xi + \frac{1}{u}\frac{\partial u(v-\varphi)}{\partial\xi} - \frac{\partial\ln u}{\partial\alpha}.$$

Diese Gleichung hat die Form:

$$\frac{\partial\ln\omega_t}{\partial\alpha} = 2P(\xi,\alpha)\,\omega + Q(\xi,\alpha),$$

die sich auch so schreiben läßt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega_\alpha - P\omega^2 - Q\omega) = 0,$$

so daß der Klammerinhalt eine Funktion R von ξ und α allein ist. Also kommt:

$$(9) \qquad \omega_\alpha = P(\xi,\alpha)\,\omega^2 + Q(\xi,\alpha)\,\omega + R(\xi,\alpha).$$

Hierin ist zwar ω nach (8) eine Funktion von t und α, aber nicht von ξ; während P, Q, R von t unabhängig sind. Betrachtet man ξ und t als willkürliche Konstanten, so liegt in (9) eine *Riccatische Differentialgleichung* für ω als Funktion von α vor. Mithin hat ω die Gestalt:

$$\omega = \frac{A\gamma + B}{C\gamma + D}. \tag{10}$$

Dabei hängen A, B, C, D von α ab, während γ als Integrationskonstante von α unabhängig ist. Da aber soeben ξ und t als willkürliche Konstanten betrachtet wurden, hat man unter γ eine Funktion von ξ und t zu verstehen. Ferner sind A, B, C, D auch von ξ abhängig, weil ξ in (9) rechts vorkommt. Dagegen sind A, B, C, D von t unabhängig, weil t in (9) gar nicht als Argument außer in ω auftritt. Nun ist ω nach (8) von ξ unabhängig. Deshalb muß dasselbe von der rechten Seite von (10) gelten. Mithin dürfen wir annehmen, daß A, B, C, D Funktionen von α allein seien und daß γ nur von t abhänge. Selbstverständlich muß $AD - BC \neq 0$ sein. Außerdem darf γ nicht unabhängig von t sein, weil sonst $\omega_t = 0$ wäre. Weil an Stelle des Parameters t irgendeine nicht konstante Funktion von t allein benutzt werden darf, ist es schließlich erlaubt, für γ einfach t zu setzen. Nach (10) und (8) besagt dies, wie behauptet wurde: Man darf immer annehmen, daß λ hinsichtlich t eine linear gebrochene Funktion sei:

$$\lambda = \frac{mt + n}{rt + s},$$

wo dann m, n, r, s Funktionen von ξ und α bedeuten.

Führt man diesen Wert für λ in (4) ein, so ergibt sich die folgende Darstellung der gesamten Kurvenschar:

$$[r(\eta^2 - \psi) - m(\eta - \varphi)]t + [s(\eta^2 - \psi) - n(\eta - \varphi)] = 0,$$

die man auch so schreiben kann:

$$(a\eta^2 + b\eta + c)t + (d\eta^2 + e\eta + f) = 0, \tag{11}$$

indem dann a, b, c, d, e, f Funktionen von ξ und α sind.

Wir erinnern jetzt daran, daß

$$\xi = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad \eta = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

war, und daß die Gleichung (11) bei bestimmt angenommenem t immer dieselbe Kurve darstellen muß, wie auch der Winkel α gewählt sein mag. Nimmt man insbesondere einmal $\alpha = 0$, also $\xi = x$, $\eta = y$, dann $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, also $\xi = -y$, $\eta = x$ an, so stellt sich dieselbe Kurve in zwei Arten dar:

$$(a_1 y^2 + b_1 y + c_1)t + (d_1 y^2 + e_1 y + f_1) = 0,$$
$$(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)t + (d_2 x^2 + e_2 x + f_2) = 0,$$

nd dabei hängen die Koeffizienten in der ersten Gleichung nur von x, ie in der zweiten Gleichung nur von y ab. Da dies für jeden Wert des arameters t gilt, ist also für beliebige x und y

$$\frac{a_1 y^2 + b_1 y + c_1}{d_1 y^2 + e_1 y + f_1} = \frac{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}{d_2 x^2 + e_2 x + f_2}.$$

Vegen (11) sind diese Brüche gleich einer rationalen Funktion $\Phi(x, y) : \Psi(x, y)$, indem Φ und Ψ ganze Funktionen zweiten Grades in , y bedeuten. Die gesamte Kurvenschar stellt sich somit in der Form dar:

$$\Phi(x, y)\, t + \Psi(x, y) = 0,$$

o daß es sich um ein Kegelschnittbüschel handelt. Da man weiß, daß in Kegelschnittbüschel in der Tat von jeder Geraden in einer Involution eschnitten wird, folgt also:

Nur die Kegelschnittbüschel und sonst keine Kurvenpaar-Scharen n der Ebene haben die besondere Eigenschaft, von jeder Geraden der Ebene in einer Involution geschnitten zu werden.

Wie in Nr. 4 gesagt wurde, rührt dieser Satz von Lie her[2]),

6. Geschlossene Scharen von Strahleninvolutionen in der Ebene. Daß man den in Nr. 2 aufgestellten Begriff der geschlossenen Schar von Punktinvolutionen dual umformen kann, liegt auf der Hand: Jeder Punkt der Ebene sei der Träger einer Strahleninvolution, und zwei Geraden mögen einander zugeordnet heißen, wenn sie einander in derjenigen Involution entsprechen, deren Träger ihr Schnittpunkt ist. Da jeder Punkt einer Geraden der Träger einer Involution ist, werden jeder Geraden einfach unendlich viele Geraden zugeordnet. Wird nun irgendein zugeordnetes Geradenpaar g, h herausgegriffen und ist weiterhin k irgendeine zu h zugeordnete Gerade sowie schließlich l irgendeine zu k zugeordnete Gerade, so kann es sein, daß dann stets auch zur letzten Geraden l die erste Gerade g zugeordnet ist. In diesem Falle soll die Involutionenschar *geschlossen* heißen.

7. Kurvenscharen in der Ebene, die in jedem Punkt eine Involution bestimmen. Dual zu den Betrachtungen in Nr. 3 ergibt sich weiterhin, daß die Ermittelung aller geschlossenen Scharen von Strahleninvolutionen darauf hinauskommt, in allgemeinster Weise zwei einfach unendliche Kurvenscharen in der Ebene so zu bestimmen, daß jeder Kurve k der einen Schar eine Kurve k' der anderen zugeordnet wird und von einem beliebigen Punkte P an jedes Kurvenpaar k, k' ein Tangenten-

[2]) Der Satz ist unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit der vorkommenden Funktionen bewiesen worden. Es wäre eine schöne Aufgabe, zu untersuchen, ob er auch ohne diese Annahme besteht.

paar t, t' derart geht, daß alle diese Paare t, t' eine Strahleninvolution mit dem Träger P ausmachen, und zwar, wo auch immer der Punkt P gewählt sein mag. Duale Umformung der Ergebnisse von Nr. 5 lehrt:

Nur die sogenannten Kegelschnittscharen, d. h. die Scharen von Kegelschnitten, die vier Tangenten gemein haben, und sonst keine Kurvenpaar-Scharen in der Ebene haben die Eigenschaft, in jedem Punkte P der Ebene vermöge ihrer von P ausgehenden Tangenten eine Involution zu erzeugen. Dabei sind allemal die beiden von P an denselben Kegelschnitt gehenden Tangenten einander zugeordnete Strahlen der Involution.

Die Gesamtheit der Involutionen, die eine Kegelschnittschar in der Ebene bestimmt, ist eine geschlossene Schar von Strahleninvolutionen, und *jede geschlossene Schar ergibt sich auf diese Weise.*

8. Flächen mit einfach unendlich vielen sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurvennetzen. Nunmehr verknüpfen wir das letzte Ergebnis mit der Flächentheorie: Liegt irgendeine Fläche vor, so erzeugen die Paare ihrer von demselben Flächenpunkte ausgehenden konjugierten Tangenten eine Strahleninvolution in der Tangentenebene des Punktes. Die senkrechte Projektion aller dieser Involutionen auf die xy-Ebene liefert eine zweifach unendliche Schar von Strahleninvolutionen in der xy-Ebene, und jeder Punkt der Ebene ist der Träger einer Involution der Schar.

Insbesondere nehmen wir jetzt an, *daß die Fläche eine einfach unendliche Schar von konjugierten Kurvennetzen habe, die sich auf die xy-Ebene sämtlich als geradlinige Netze projizieren.* Jede krummlinige Masche eines derartigen Netzes liefert vermöge der Projektion ein geradliniges Viereck in der xy-Ebene, und jede Seite dieses Vierecks ist zur folgenden vermöge der Involutionenschar der Ebene im Sinne von Nr. 6 zugeordnet. Daher ist diese Involutionenschar geschlossen. Nach Nr. 7 projizieren sich also jene einfach unendlich vielen konjugierten Kurvennetze als geradlinige Netze, deren Geraden die Tangenten der Kegelschnitte einer sogenannten Kegelschnittschar sind. Dabei besteht jedes einzelne geradlinige Netz aus allen Tangenten eines einzelnen Kegelschnittes der Schar.

In der Involution, die von den von einem Punkte P der Ebene ausgehenden Tangentenpaaren der Kegelschnittschar gebildet wird, sind die Doppelstrahlen die Tangenten der beiden durch P selbst gehenden Kegelschnitte der Schar. Andererseits sind die Doppelstrahlen die Projektionen der Haupttangenten desjenigen Flächenpunktes, dessen Projektion der Punkt P ist. Daher projizieren sich die Haupttangentenkurven (asymptotischen Kurven) der Fläche als die Kegelschnitte der Schar. Diese Schlußfolgerung ist umkehrbar, so daß sich ergibt:

Eine Fläche hat dann und nur dann eine einfach unendliche Schar von konjugierten Kurvennetzen, die sich auf die xy-Ebene als geradlinige Netze projizieren, wenn die Projektionen der Haupttangentenkurven der Fläche die Kegelschnitte einer sogenannten Kegelschnittschar sind.

9. Bestimmung der Flächen mit einfach unendlich vielen sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurvennetzen. Nach dem letzten Satze kann man leicht den analytischen Ausdruck aller Flächen von der betrachteten Art bekommen: Man nimmt in der xy-Ebene eine Kegelschnittschar an und ermittelt die zugehörige Fläche so, daß sich ihre Haupttangentenkurven als die Kegelschnitte der Schar projizieren.

Wir führen dies insbesondere für den Hauptfall durch, wo die Kegelschnitte vier verschiedene Tangenten gemein haben. Da die gesuchten Flächen vermöge projektiver Transformationen, bei denen die xy-Ebene und der unendlich ferne Punkt der z-Achse in Ruhe bleiben, in ebensolche Flächen übergehen, können wir annehmen, daß die vier gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte die Geraden

$$x \pm y \pm 1 = 0 \tag{12}$$

seien. Dann hat die Kegelschnittschar die Gleichung

$$\tau x^2 + (1-\tau) y^2 = \tau(1-\tau),$$

indem τ den auf die einzelnen Kurven der Schar bezüglichen Parameter bedeutet. Diese Kegelschnitte sind die Integralkurven der Differentialgleichung

$$xy\,dx^2 + (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy + xy\,dy^2 = 0.$$

Andererseits ist

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

die Differentialgleichung der Projektionen der Haupttangentenkurven einer Fläche $z = f(x, y)$, wenn r, s, t die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von z nach x, y bedeuten. Mithin wird gefordert:

$$r = 2\varrho xy, \quad s = \varrho(1 - x^2 - y^2), \quad t = 2\varrho xy, \tag{13}$$

und für den Proportionalitätsfaktor ϱ ergeben sich aus den Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$$

die Forderungen:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial \ln \varrho}{\partial x} = \frac{x(1 - x^2 + y^2)}{(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)},$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial \ln \varrho}{\partial y} = \frac{y(1 + x^2 - y^2)}{(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)}.$$

Durch Integration geht

$$\frac{1}{\varrho} = (x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)$$

hervor, wenn wir hier und im folgenden der Einfachheit halber von der additiven Integrationskonstante absehen. Nach (13) kommt demnach:

$$r = t = \frac{2xy}{(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)},$$

$$s = \frac{1-x^2-y^2}{(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)}$$

Bezeichnen p und q die partiellen Ableitungen erster Ordnung von z nach x, y, so ergibt sich durch abermalige Integration:

$$p = \frac{1}{4} \ln \frac{(x+y+1)(x-y-1)}{(x+y-1)(x-y+1)},$$

$$q = \frac{1}{4} \ln \frac{(x+y+1)(x-y+1)}{(x+y-1)(x-y-1)}.$$

Schließlich liefert eine letzte Integration die Flächengleichung:

$$z = \frac{1}{4}[(x+y+1)\ln(x+y+1) - (x+y-1)\ln(x+y-1) - (x-y+1)\ln(x-y+1) + (x-y-1)\ln(x-y-1)].$$

Was die fortgelassenen Integrationskonstanten betrifft, so kann man sie leicht nachträglich einführen. Denn jede derartige Fläche geht in eine von derselben Art über, wenn z durch irgendeine nicht von z unabhängige lineare ganze Funktion von x, y, z ersetzt wird.

Wenn man vermöge einer projektiven Transformation in der xy-Ebene die vier Geraden (12) in irgendwelche vier Geraden

$$g_i \equiv a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{14}$$

überführt, erkennt man leicht, *daß diejenigen Flächen, die zu den diese vier Geraden berührenden Kegelschnitten gehören, in ihrer Gesamtheit in der folgenden Form dargestellt werden:*

$$z = \text{konst.} \begin{vmatrix} g_1 \ln g_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ g_2 \ln g_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ g_3 \ln g_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ g_4 \ln g_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + \text{konst.}\, x + \text{konst.}\, y + \text{konst.} \tag{15}$$

Damit ist der Hauptfall allgemein erledigt. Welche Flächen sich in den verschiedenen Sonderfällen ergeben, wo einige oder alle Geraden (14) zusammenrücken, wollen wir nicht weiter erörtern. Wir bemerken nur, daß man die Ergebnisse in den Sonderfällen leicht aus dem allgemeinen Ergebnis (15) durch Grenzübergänge ableiten kann, bei denen nach den a_i, b_i, c_i zu differenzieren ist.

Die Differentialgleichung der Projektionen der Haupttangentenkurven er Fläche (15), d. h. die Differentialgleichung der Kegelschnitte mit den ier gemeinsamen Tangenten (14) wollen wir noch angeben. Man kann ie so schreiben:

16)
$$\begin{vmatrix} \frac{(dg_1)^2}{g_1} & a_1 & b_1 & c_1 \\ \frac{(dg_2)^2}{g_2} & a_2 & b_2 & c_2 \\ \frac{(dg_3)^2}{g_3} & a_3 & b_3 & c_3 \\ \frac{(dg_4)^2}{g_4} & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

rgendeines der sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurvennetze ekommt man, indem man die Fläche mit allen denjenigen zur xy-Ebene enkrechten Ebenen schneidet, die einen Kegelschnitt der Schar berühren.

Selbstverständlich können die Geraden (14) auch imaginär sein. Man kann, um ein Beispiel zu erwähnen, die Paare der durch zwei bestimmte Punkte F_1 und F_2 gehenden Minimalgeraden der xy-Ebene wählen. Dann besteht die Kegelschnittschar aus allen Kegelschnitten mit den Brennpunkten F_1 und F_2. Sind die Brennpunkte die Stellen $x = \pm c$ der x-Achse, so sind

$$x \pm iy \pm c = 0$$

die Gleichungen der vier Geraden. Insbesondere sei die der ersten Geraden diese:

$$g_1 \equiv x + iy - c = 0.$$

Dann ist

$$g_1 \ln g_1 = (x-c) \ln \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - y \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + i \left[y \ln \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c) \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} \right].$$

Werden zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c}, \qquad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c}$$

gebraucht, so ist

$$g_1 \ln g_1 = (x-c) \ln r_1 - y\varphi_1 + i[y \ln r_1 + (x-c)\varphi_1],$$

ferner $a_1 = 1$, $b_1 = i$, $c_1 = -c$. Die Glieder der zweiten Zeile der in (15) auftretenden Determinante ergeben sich hieraus, wenn man i durch $-i$ ersetzt, die der dritten, wenn man c durch $-c$, r_1 durch r_2 und φ_1 durch φ_2 ersetzt, schließlich die der letzten, wenn man beides tut. Mithin gibt (15):

$$z = \text{konst.} \left[y \ln \frac{r_1}{r_2} + (x-c)\varphi_1 - (x+c)\varphi_2 \right] + \text{konst.}\, x + \text{konst.}\, y + \text{konst.}$$

Als Vertreter der Flächenfamilie kann also die Fläche

$$z = y \ln \frac{r_1}{r_2} + (x-c)\varphi_1 - (x+c)\varphi_2$$

oder, ausführlich geschrieben:

$$z = \frac{1}{2} y \ln \frac{(x-c)^2+y^2}{(x+c)^2+y^2} + (x-c) \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} - (x+c) \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c}$$

dienen.

Die Haupttangentenkurven dieser Fläche projizieren sich als konfokale Kegelschnitte. Alle diejenigen zur xy-Ebene senkrechten Ebenen, die einen dieser Kegelschnitte berühren, schneiden die Fläche in den Kurven eines konjugierten Kurvennetzes.

10. Bestimmung aller Flächen mit mindestens einem sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurvennetze. Die in den beiden letzten Nummern betrachteten Flächen bilden eine ausgezeichnete Klasse innerhalb einer großen Flächenfamilie, zu der wir uns jetzt wenden: Wir untersuchen diejenigen *Flächen, die mindestens ein konjugiertes Kurvennetz haben, das sich bei senkrechter Projektion auf die xy-Ebene als ein geradliniges Netz abbildet.* Man kann die endlichen Gleichungen aller Flächen von dieser Art auf folgendem Weg ermitteln:

Zwei einfach unendliche Geradenscharen in der xy-Ebene werden durch Gleichungen

$$(17) \qquad \begin{cases} \varphi_1(u)x + \psi_1(u)y + \chi_1(u) = 0, \\ \varphi_2(v)x + \psi_2(v)y + \chi_2(v) = 0 \end{cases}$$

dargestellt, deren Koeffizienten Funktionen je eines Parameters u oder v sind. Diese Geraden sollen nun die Projektionen der Kurven eines konjugierten Netzes auf der gesuchten Fläche sein. Auf der Fläche benutzen wir u und v als krummlinige Koordinaten, so daß die Auflösung der Gleichungen (17) nach x und y ohne weiteres die beiden ersten Gleichungen

$$(18) \qquad x = \frac{\psi_1\chi_2 - \psi_2\chi_1}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, \qquad y = \frac{\chi_1\varphi_2 - \chi_2\varphi_1}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}$$

der Fläche gibt. Durch einfache Eliminationen aus den Gleichungen (17) und den aus ihnen durch Differentiation nach u und v entstehenden Gleichungen stellt man leicht fest, daß x_{uv}, x_u, x_v und y_{uv}, y_u, y_v die Gleichungen

$$(19) \qquad x_{uv} = A x_u + B x_v, \qquad y_{uv} = A y_u + B y_v$$

befriedigen, in denen

$$A = -\frac{\varphi_1\psi_1' - \varphi_1'\psi_1}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}\frac{D_2}{D_1}, \qquad B = \frac{\varphi_2\psi_2' - \varphi_2'\psi_2}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}\frac{D_1}{D_2}$$

st, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_1' \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_1' \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_1' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_2' \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_2' \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_2' \end{vmatrix}$$

Damit nun die Parameterlinien der Fläche, die sich als die Geradenscharen (17) projizieren, zueinander konjugiert seien, ist nach einem wohlbekannten Satze von G. Darboux[3]) notwendig und hinreichend, daß entsprechend (19) auch

$$z_{uv} = A z_u + B z_v$$

sei. Werden hierin und in (19) die Werte von A und B eingesetzt, so folgt also: Die Gleichung

$$(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) D_1 D_2 \Omega_{uv} + (\varphi_1\psi_1' - \varphi_1'\psi_1) D_2^2 \Omega_u - (\varphi_2\psi_2' - \varphi_2\psi_2) D_1^2 \Omega_v = 0$$

wird durch die Annahmen $\Omega = x$ und $\Omega = y$ erfüllt und soll auch durch $\Omega = z$ befriedigt werden. Setzt man

$$\omega = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)\Omega,$$

so ergibt sich, daß die Gleichung

$$\omega_{uv} - \frac{\partial \ln D_1}{\partial v}\omega_u - \frac{\partial \ln D_2}{\partial u}\omega_v + \frac{\partial \ln D_1}{\partial v}\frac{\partial \ln D_2}{\partial u}\omega = 0 \tag{20}$$

durch die Annahmen

$$\omega = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)x \quad \text{und} \quad \omega = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)y$$

erfüllt wird und auch durch

$$\omega = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)z \tag{21}$$

befriedigt werden soll. Setzen wir zur Abkürzung

$$\alpha = \psi_1\chi_2 - \psi_2\chi_1, \qquad \beta = \chi_1\varphi_2 - \chi_2\varphi_1, \qquad \gamma = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1,$$

so heißt dies nach (18), daß (20) durch $\omega = \alpha$ und $\omega = \beta$ erfüllt wird und durch $\omega = \gamma z$ erfüllt werden soll.

Wesentlich ist nun der Umstand, daß die Gleichung (20) in bezug auf die Funktionenpaare φ_1, φ_2; ψ_1, ψ_2; χ_1, χ_2 symmetrisch gebaut ist. Denn da sie durch $\omega = \alpha$ und $\omega = \beta$ befriedigt wird, folgt daraus, daß sie auch durch $\omega = \gamma$ befriedigt wird. Dies aber besagt, daß sich (20) so schreiben läßt:

$$\begin{vmatrix} \omega_{uv} & \omega_u & \omega_v & \omega \\ \alpha_{uv} & \alpha_u & \alpha_v & \alpha \\ \beta_{uv} & \beta_u & \beta_v & \beta \\ \gamma_{uv} & \gamma_u & \gamma_v & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

[3]) Siehe seine *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1. Teil, 1887, S. 102.

Diese Forderung an ω läßt sich weiterhin anders ausdrücken: Es muß drei Funktionen λ, μ, ν von u, v derart geben, daß

$$\begin{aligned}\omega &= \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma,\\ \omega_u &= \lambda\alpha_u + \mu\beta_u + \nu\gamma_u,\\ \omega_v &= \lambda\alpha_v + \mu\beta_v + \nu\gamma_v,\\ \omega_{uv} &= \lambda\alpha_{uv} + \mu\beta_{uv} + \nu\gamma_{uv}\end{aligned}$$

ist. Differenziert man die erste Gleichung nach u und nach v, die zweite nach v und die dritte nach u, so erkennt man, daß diese Forderungen ersetzbar sind durch:

$$\omega = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

und

$$\begin{aligned}\lambda_u\alpha + \mu_u\beta + \nu_u\gamma &= 0, \qquad \lambda_v\alpha + \mu_v\beta + \nu_v\gamma = 0,\\ \lambda_u\alpha_v + \mu_u\beta_v + \nu_u\gamma_v &= 0, \qquad \lambda_v\alpha_u + \mu_v\beta_u + \nu_v\gamma_u = 0.\end{aligned}$$

Die letzten vier Gleichungen liefern

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \varrho(\beta\gamma_v - \beta_v\gamma), \quad \mu_u = \varrho(\gamma\alpha_v - \gamma_v\alpha), \quad \nu_u = \varrho(\alpha\beta_v - \alpha_v\beta),\\ \lambda_v &= \sigma(\beta\gamma_u - \beta_u\gamma), \quad \mu_v = \sigma(\gamma\alpha_u - \gamma_u\alpha), \quad \nu_v = \sigma(\alpha\beta_u - \alpha_u\beta),\end{aligned}$$

wo ϱ und σ noch unbekannte Funktionen von u, v sind. Da $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ nur von u sowie $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ nur von v abhängen, lassen sich die letzten Gleichungen auch so schreiben:

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \varrho D_2\varphi_1, \quad \mu_u = \varrho D_2\psi_1, \quad \nu_u = \varrho D_2\chi_1,\\ \lambda_v &= -\sigma D_1\varphi_2 \quad \mu_v = -\sigma D_1\psi_2, \quad \nu_v = -\sigma D_1\chi_2,\end{aligned}$$

oder, wenn man ϱD_2 mit U sowie $-\sigma D_1$ mit V bezeichnet, so:

$$\begin{aligned}\lambda_u &= U\varphi_1, \quad \mu_u = U\psi_1, \quad \nu_u = U\chi_1,\\ \lambda_v &= V\varphi_2, \quad \mu_v = V\varphi_2, \quad \nu_v = V\chi_2.\end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen $\lambda_{uv} = \lambda_{vu}$ usw. lehren nun, daß U nur von u und V nur von v abhängt, weil $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ nicht zu $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ proportional sind. Also kommt:

$$\begin{aligned}\lambda &= \int U\varphi_1\,du + \int V\varphi_2\,dv,\\ \mu &= \int U\psi_1\,du + \int V\psi_2\,dv,\\ \nu &= \int U\chi_1\,du + \int V\chi_2\,dv,\end{aligned}$$

so daß sich ferner ergibt:

$$\omega = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \int U\varphi_1\,du + \int V\varphi_2\,dv\\ \psi_1 & \psi_2 & \int U\psi_1\,du + \int V\psi_2\,dv\\ \chi_1 & \chi_2 & \int U\chi_1\,du + \int V\chi_2\,dv \end{vmatrix}$$

ch (21) geht hieraus durch Division mit $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ schließlich z vor.

Somit gilt der Satz:

Alle Flächen, die ein konjugiertes Kurvennetz haben, das sich auf xy-Ebene als das Netz der beiden Geradenscharen

2) $$\begin{cases} \varphi_1(u)x + \psi_1(u)y + \chi_1(u) = 0, \\ \varphi_2(v)x + \psi_2(v)y + \chi_2(v) = 0 \end{cases}$$

pjiziert, lassen sich mittels konjugierter Parameter u, v so darstellen:

3) $$\begin{cases} x = \dfrac{\psi_1\chi_2 - \psi_2\chi_1}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, \qquad y = \dfrac{\chi_1\varphi_2 - \chi_2\varphi_1}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \int U\varphi_1\,du + \int V\varphi_2\,dv \\ \psi_1 & \psi_2 & \int U\psi_1\,du + \int V\psi_2\,dv \\ \chi_1 & \chi_2 & \int U\chi_1\,du + \int V\chi_2\,dv \end{vmatrix}}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}. \end{cases}$$

bei bedeutet U eine willkürliche Funktion von u allein sowie V eine llkürliche Funktion von v allein.

11. Kennzeichen dafür, daß eine Fläche ein sich geradlinig ojizierendes konjugiertes Kurvennetz hat. Eine Fläche liege der Darstellung $z = f(x, y)$ vor; dann fragt es sich, unter welchen alytischen Bedingungen der Fläche ein sich geradlinig projizierendes njugiertes Kurvennetz zukommt. Wenn r, s, t die partiellen Ableitungen eiter Ordnung von z nach x, y bezeichnen, sind zwei Fortschreitungs-htungen $d_1x : d_1y$ und $d_2x : d_2y$ auf der Fläche vom Flächenpunkte y, z) aus bekanntlich dann und nur dann konjugiert, wenn

$$r\,d_1x\,d_2x + s(d_1x\,d_2y + d_2x\,d_1y) + t\,d_1y\,d_2y = 0$$

Deshalb sind die Integralkurven zweier gewöhnlicher Differential-ichungen erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \tau_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \tau_2(x, y)$$

Projektionen der Kurven eines konjugierten Netzes, wenn

4) $$r + s(\tau_1 + \tau_2) + t\tau_1\tau_2 = 0$$

Diese Integralkurven sind geradlinig, wenn jede der beiden Diffe-tialgleichungen nach sich zieht, daß $d^2y : dx^2 = 0$ wird, d. h. wenn

5) $$\frac{\partial\tau_1}{\partial x} + \tau_1\frac{\partial\tau_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_2}{\partial x} + \tau_2\frac{\partial\tau_2}{\partial y} = 0$$

Die Fläche $z = f(x, y)$ hat also dann und nur dann ein sich adlinig projizierendes Kurvennetz, wenn es Funktionen τ_1 und τ_2 von y gibt, die den drei Bedingungen (24) und (25) genügen.

Es ist angebracht, gleich hier den Sonderfall einer *abwickelbar* Fläche, d. h. den Fall $s^2 - rt = 0$ zu erledigen. In diesem Falle w der Bedingung (24) durch die Annahme $\tau_1 = -s:t$ genügt, während beliebig bleibt. Die erste Gleichung (25) wird im Falle $s^2 - rt =$ durch die Annahme $\tau_1 = -s:t$ befriedigt, und man kann immer τ_2 wählen, daß auch die zweite Gleichung (25) erfüllt wird. Demna sind die abwickelbaren Flächen zu den in dieser Nummer zu betrachtend Flächen zu rechnen. In der Tat liegt die Sache so, daß man auf ei abwickelbaren Fläche jede beliebige Kurvenschar als zur Schar der ger linigen Erzeugenden konjugiert bezeichnen darf. Wenn man also Fläche mit einer zur xy-Ebene senkrechten Ebenenschar schneidet, bild die Schnittkurven zusammen mit den geradlinigen Erzeugenden allem ein konjugiertes Kurvennetz, das sich geradlinig projiziert.

Setzt man $\tau_1 \tau_2 = \lambda$ und $\tau_1 + \tau_2 = \mu$, so lassen sich die Bedingung (25) so schreiben:

$$\lambda_x = -\lambda \mu_y, \qquad \mu_x = \lambda_y - \mu \mu_y.$$

Da nun nach (24) für μ der Wert $-(r + t\lambda):s$ gesetzt werden kan läßt sich μ eliminieren. Dadurch ergibt sich eine neue Fassung d Bedingungen, nämlich, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die partiellen Ableitungen dritt Ordnung von z nach x, y bedeuten, diese:

$$(26) \qquad \begin{cases} \lambda_x = \dfrac{t^2\beta - 2st\gamma + s^2\delta}{s(s^2 - rt)}\lambda^2 - \dfrac{st\alpha - (s^2 + rt)\beta + rs\gamma}{s(s^2 - rt)}\lambda, \\ \lambda_y = \dfrac{st\beta - (s^2 + rt)\gamma + rs\delta}{s(s^2 - rt)}\lambda - \dfrac{s^2\alpha - 2rs\beta + r^2\gamma}{s(s^2 - rt)}. \end{cases}$$

Wegen der Divisionen mit s und $s^2 - rt$ sind hier allerdings die Fäl $s = 0$ und $s^2 - rt = 0$ auszuschließen. Der zweite Fall ist der vorh besprochene der abwickelbaren Flächen. Der erste Fall $s = 0$ betrifft d Flächen mit Gleichungen von der Form:

$$z = X(x) + Y(y).$$

Das sind die Flächen, die durch Schiebung einer in der xz-Eben gelegenen Kurve längs einer in der yz-Ebene gelegenen Kurve hervo gehen. Auf einer Schiebungsfläche sind aber bekanntlich die erzeugend Kurven konjugiert, so daß jene Flächen in der Tat konjugierte Kurve netze haben, die sich geradlinig projizieren, nämlich als die Parallelen den Achsen in der xy-Ebene. Der Fall $s = 0$ läßt sich aber imm durch eine Drehung des Achsenkreuzes um die z-Achse in den Fall $s \neq$ verwandeln. Daher dürfen wir $s \neq 0$ voraussetzen. Außerdem schließe wir jetzt wegen des Nenners $s^2 - rt$ die abwickelbaren Flächen aus.

Das System (26) wird symmetrischer, wenn man in die erste Gleichung $\bar{\lambda} = 1 : \lambda$ einführt. Dann hat man die drei Bedingungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda\bar{\lambda} = 1, \\ &\bar{\lambda}_x = \frac{st\alpha - (s^2+rt)\beta + rs\gamma}{s(s^2-rt)}\bar{\lambda} - \frac{t^2\beta - 2st\gamma + s^2\delta}{s(s^2-rt)}, \\ &\lambda_y = \frac{st\beta - (s^2+rt)\gamma + rs\delta}{s(s^2-rt)}\lambda - \frac{s^2\alpha - 2rs\beta + r^2\gamma}{s(s^2-rt)}. \end{aligned}\right.$$

Hier sind nun die Faktoren von $\bar{\lambda}$ und λ die partiellen Ableitungen

$$ln\frac{s}{s^2-rt}$$

h x und y. Wenn man also statt λ und $\bar{\lambda}$ die Funktionen

$$\varphi = \frac{r^2}{s} - \frac{s^2-rt}{s}\lambda, \qquad \psi = \frac{t^2}{s} - \frac{s^2-rt}{s}\bar{\lambda}$$

führt, nehmen die Bedingungen eine besonders einfache Gestalt an. e erste Forderung $\lambda\bar{\lambda} = 1$ schreibt sich jetzt am übersichtlichsten in terminantenform

$$\begin{vmatrix} \varphi & r & s \\ r & s & t \\ s & t & \psi \end{vmatrix} = 0,$$

hrend die beiden anderen Forderungen einfach in

$$\varphi_y = \alpha, \qquad \psi_x = \delta$$

ergehen.

Nun sei unter ω eine Funktion von x, y verstanden, deren Ableitung eiter Ordnung

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} = z = f(x, y)$$

Dann ist

$$r = \frac{\partial^4\omega}{\partial x^3\partial y}, \qquad s = \frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2}, \qquad t = \frac{\partial^4\omega}{\partial x\partial y^3},$$

d die Forderungen (29) besagen:

$$\varphi_y = \frac{\partial^5\omega}{\partial x^4\partial y}, \qquad \psi_x = \frac{\partial^5\omega}{\partial x\partial y^4}.$$

ω durch (30) nur bis auf additive willkürliche Funktionen von x allein d von y allein festgelegt wird, darf man daher

$$\varphi = \frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}, \qquad \psi = \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}$$

nehmen, und dies ist in (28) nebst den angegebenen Ausdrücken für s, t einzusetzen. Wenn man auch die Sonderfälle $s = 0$ und $s^2 - rt = 0$

mit Hilfe von ω ausdrückt, gelangt man schließlich zu dem merkwürdig Satze:

Ist ω eine Funktion der Koordinaten x, y, so hat die durch

$$z = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

dargestellte Fläche dann und nur dann mindestens ein sich auf die x Ebene geradlinig projizierendes konjugiertes Kurvennetz, wenn entwe

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^3 \partial y} & \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} & \frac{\partial^4 \omega}{\partial x \partial y^3} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} & \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^3 \partial y} & \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \\ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^3 \partial y} & \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial x^2} & \frac{\partial^4 \omega}{\partial x \partial y^3} \\ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} & \frac{\partial^4 \omega}{\partial x \partial y^3} & \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \end{vmatrix} = 0$$

ist.

12. Die geradlinigen Flächen. Zu den konjugierten Kurvennetz einer Fläche gehört als Grenzfall jede einzelne der beiden Scharen v Haupttangentenkurven (asymptotischen Kurven), da jede Haupttangente kurve zu sich selbst konjugiert ist. Wenn man also im ersten Ansat der vorhergehenden Nummer in (24) und (25) insbesondere $\tau_1 = \tau_2$ s nimmt, wird man zu denjenigen Flächen kommen, deren eine Schar v Haupttangentenkurven sich geradlinig projiziert. Falls diese Flächen nic abwickelbar sind, muß dann diese eine Kurvenschar selbst geradlinig sei denn die Schmiegungsebenen einer krummen Haupttangentenkurve sind die Tangentenebenen der Fläche längs der Kurve. Man gelangt somit den *geradlinigen* Flächen. Diese Schlußfolgerung ist offenbar umkehrb

Der Vollständigkeit halber verfolgen wir dies noch etwas weite wenn wir auch dadurch zu bekannten Ergebnissen gelangen. Wenn m in (24) und (25) für τ_1 und τ_2 dieselbe Funktion τ setzt, kommt:

$$r + 2s\tau + t\tau^2 = 0, \qquad \tau_x + \tau\tau_y = 0.$$

Nach der ersten Gleichung ist:

$$\tau = \frac{-s + \sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

setzen dieses Wertes in die zweite gibt, wenn wieder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die iellen Ableitungen dritter Ordnung von z nach x, y bedeuten:

$$\begin{cases} t^3\alpha - 3st^2\beta + 3t(2s^2 - rt)\gamma - s(4s^2 - 3rt)\delta \\ \quad + [2t^2\beta - 6st\gamma + (4s^2 - rt)\delta]\sqrt{s^2 - rt} = 0. \end{cases}$$

s also ist die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung aller gerad-gen Flächen. Bezeichnet man die Quadratwurzel mit Δ, so ist

$$\tau = \frac{\Delta - s}{t}, \qquad \tau^2 = \frac{2s^2 - rt - 2s\Delta}{t^2},$$

$$\tau^3 = \frac{3rst - 4s^3 + (4s^2 - rt)\Delta}{t^3},$$

daß (31) übergeht in:

$$\alpha + 3\beta\tau + 3\gamma\tau^2 + \delta\tau^3 = 0.$$

se übersichtliche Form der partiellen Differentialgleichung aller gerad-gen Flächen ist längst bekannt, siehe z. B. *Serret-Scheffers, Lehrbuch Differential- und Integralrechnung* **1**, (6./7. Aufl. 1915), S. 562. Wir en hinzu: In der Form (31) läßt sich die Gleichung leicht von der tionalität Δ befreien. Dann lautet sie so:

$$\begin{aligned} &t^3\alpha^2 + 9rt^2\beta^2 + 9r^2t\gamma^2 + r^3\delta^2 \\ &\quad - 6s(t^2\alpha\beta + 3rt\beta\gamma + r^2\gamma\delta) \\ &+ 6(2s^2 - rt)(t\alpha\gamma + r\beta\delta) - 2(4s^2 - 3rt)s\alpha\delta = 0. \end{aligned}$$

Da die in doppelter Weise geradlinigen Flächen die *Flächen zweiter nung* sind, ergeben sich die Bedingungen für die Flächen zweiter nung, wenn man verlangt, daß (31) für beide Werte der Quadratwurzel e. Man sieht leicht, daß sich diese Bedingungen so schreiben lassen:

$$2st\alpha - 3rt\beta + r^2\delta = 0,$$

$$t^2\alpha - 3rt\gamma + 2rs\delta = 0.$$

13. Vier Klassen von Flächen mit sich geradlinig pro-erenden konjugierten Kurvennetzen. Wie schon in Nr. 11 be-kt wurde, kann eine *abwickelbare* Fläche als eine Fläche bezeichnet den, die unendlich viele sich geradlinig projizierende konjugierte Kurven-ze hat. In die Gleichungen dieser Netze geht eine willkürliche Funktion Deshalb bilden die abwickelbaren Flächen bei der Scheidung aller chen in Klassen nach der Anzahl ihrer sich geradlinig projizierenden jugierten Kurvennetze das eine Extrem. Das andere ist die Klasse enigen Flächen, denen gar kein Netz von der in Rede stehenden Art ommt.

Wir sehen jetzt von den abwickelbaren Flächen ab. Auch dür wir nach Nr. 11 annehmen, daß auf der in Betracht gezogenen Flä die Ableitung s von Null verschieden sei. Dann gibt es auf der Flä nur dann ein sich geradlinig projizierendes konjugiertes Kurvennetz, w das unter (26) in Nr. 11 aufgestellte System von partiellen Differen gleichungen erster Ordnung eine Lösung λ hat. Zunächst kann nun d System *unbeschränkt integrabel* sein, so daß seine allgemeinste Lösun bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt ist. In diesem Falle g es auf der Fläche eine *einfach unendliche Schar von geradlinig pro zierbaren konjugierten Kurvennetzen.* Die Bedingungen für die un schränkte Integrabilität gehen hervor, wenn man durch Differentiation ersten Gleichung (26) nach y und der zweiten nach x die Ableitun λ_{xy} und λ_{yx} berechnet und einander gleichsetzt. Dabei hat man übe für λ_x und λ_y die Werte (26) selbst einzuführen. Auf diese Weise erg sich eine gewisse in λ quadratische Gleichung

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \tag{32}$$

deren Koeffizienten bekannte Funktionen der partiellen Ableitungen zwei bis vierter Ordnung von z nach x, y sind. Das System (26) ist nun u beschränkt integrabel, sobald diese quadratische Gleichung identisch beste

Besteht sie nicht identisch, so sind drei Fälle denkbar: Entwe befriedigt jede Wurzel λ von (32) das System (26) oder nur eine o gar keine tut es. Dementsprechend hat die Fläche zwei verschied geradlinig projizierbare konjugierte Kurvennetze oder nur eines oder gar kein

Diejenigen Flächen, die zum Falle der unbeschränkten Integrabili des Systems (26) gehören, d. h. auf denen es einfach unendlich vi geradlinig projizierbare konjugierte Kurvennetze gibt, wurden in Nr und 9 bestimmt, diejenigen, die mindestens ein derartiges Netz hab in Nr. 10.

Somit bleibt die Aufgabe übrig, diejenigen Flächen zu bestimm die *zwei verschiedene* geradlinig projizierbare konjugierte Kurvennetze hab

14. Ansatz zur Bestimmung aller Flächen mit zwei v schiedenen sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurve netzen. Entsprechend dem Ansatze von Nr. 11 gehen wir jetzt von z Paaren von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \tau_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \tau_2(x, y)$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \tau_3(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \tau_4(x, y)$$

aus, die sämtlich als Integralkurven Geraden haben sollen. Die beid ersten Geradenscharen sollen die Projektion eines konjugierten Kurv

zes der Fläche bilden, ebenso die beiden anderen Geradenscharen, d. h. die Stelle der Bedingung (24) von Nr. 11 treten jetzt zwei Bedingungen

$$\begin{cases} r + s(\tau_1 + \tau_2) + t\tau_1\tau_2 = 0, \\ r + s(\tau_3 + \tau_4) + t\tau_3\tau_4 = 0. \end{cases}$$

se Bedingungen sollen aber nicht übereinstimmen. Da sich durch mination von r, d. h. durch Subtraktion

$$s(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4) + t(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4) = 0$$

ibt, sollen also

$$\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4 \quad \text{und} \quad \tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4$$

ht beide gleich Null sein. Wäre $\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4 = 0$, aber der erste Ausck von Null verschieden, so würde sich $s = 0$ ergeben. Von den chen, auf denen $s = 0$ ist, können wir aber wie in Nr. 11 absehen. mnach setzen wir

$$\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4 \neq 0$$

raus.

Nun ist noch zum Ausdruck zu bringen, daß die vier angenommenen ferentialgleichungen als Integralkurven lauter Geraden haben. Dies tun jetzt anders als in Nr. 11. Eine Gerade wird durch eine Gleichung

$$ux + vy = 1$$

gestellt. Benutzen wir u, v als Linienkoordinaten, so definiert eine ichung

$$\varphi(u, v) = 0$$

e einfach unendliche Geradenschar. Die vorgelegten vier Differentialichungen mögen nun die vier Geradenscharen

$$\varphi_i(u_i, v_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Integralkurven haben, d. h. die einzelnen Scharen von Integralkurven en durch Gleichungenpaare

$$\varphi_i(u_i v_i) = 0, \qquad u_i x + v_i y = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gedrückt. Die Gleichung $\varphi_i = 0$ definiert z. B. u_i als Funktion von v_i, daß die zweite Gleichung in der Tat einfach unendlich viele Geraden dem Parameter v_i darstellt. Da hier

$$u_i dx + v_i dy = 0$$

sind die Geraden die Integralkurven der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \tau_i(x, y),$$

n überdies

$$u_i + v_i\tau_i = 0$$

ist. Setzen wir demnach $u_i = -v_i\tau_i$ in (34) ein, so geht die ers Gleichung (34) in eine Gleichung $\psi_i = 0$ zwischen v_i und τ_i über. Dem nach setzen wir an:

$$\psi_i(v_i, \tau_i) = 0, \qquad (y - x\tau_i)v_i = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4$$

Jedes dieser Gleichungenpaare definiert ein Paar v_i, τ_i so als Funktion von x, y, daß (35) als Integralkurven in der Tat Geraden hat. Mith liegt jetzt folgende Aufgabe vor:

Man soll vier Funktionen ψ_i von v_i, τ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ so ermitteln, da die vier Gleichungenpaare (36) *die Funktionenpaare v_i, τ_i als Funktion von x, y bestimmen und alsdann die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (33) *eine Integralfläche $z = f(x, y)$ gemein haben. Dab wird vorausgesetzt, daß $\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4 \neq 0$ sei.*

Aus (33) berechnet man

$$r = Us, \qquad t = Vs,$$

indem U und V die folgenden Funktionen von $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ vorstelle

$$(37) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{(\tau_1+\tau_2)\tau_3\tau_4 - (\tau_3+\tau_4)\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4}, \\ V = \dfrac{\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4}{\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4}. \end{cases}$$

Damit es eine gemeinsame Integralfläche der Differentialgleichungen (3 gibt, muß

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$$

sein, d. h. nach Einsetzen von $r = Us$, $t = Vs$:

$$\frac{\partial \ln s}{\partial x} = \frac{U_y + UV_x}{1 - UV}, \qquad \frac{\partial \ln s}{\partial y} = \frac{V_x + VU_y}{1 - UV}.$$

Eine Funktion $\ln s$ kann aber diesen Forderungen nur dann genügen, wen

$$(38) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{U_y + UV_x}{1 - UV} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{V_x + VU_y}{1 - UV}$$

ist. Dies also stellt die *Integrabilitätsbedingung* unserer Aufgabe da Sie läßt sich so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{U_y}{1-UV} + \frac{UV_{xy}}{1-UV} + \frac{U^2V_xV_y}{(1-UV)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{V_x}{1-UV} + \frac{VU_{xy}}{1-UV} + \frac{V^2U_xU_y}{(1-UV)^2},$$

daher auch so:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{V_x}{1-UV} - \frac{UV_{xy}}{1-UV} - \frac{U^2V_xV_y}{(1-UV)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{U_y}{1-UV} - \frac{VU_{xy}}{1-UV} - \frac{V^2U_xU_y}{(1-UV)^2},$$

ıd dies ist nichts anderes als die Gleichung:

9) $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{V_x - UV_y}{1-UV} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{U_y - VU_x}{1-UV}.$$

iermit ist die Integrabilitätsbedingung auf eine für die weitere Berechnung eignetere Form gebracht.

15. Auswertung der Integrabilitätsbedingung für Flächen it zwei sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurvenetzen. Zunächst handelt es sich jetzt darum, die beiden in (39) auftenden Brüche mit Hilfe von (37) auszurechnen. Dabei muß man bechten, daß zwischen den Ableitungen der τ_i nach x und y eine einfache eziehung besteht. Sie wurde schon in Nr. 11 unter (25) erwähnt, mag er hier noch einmal aus der zweiten Gleichung (36) abgeleitet werden. ie Differentiation nach x und y gibt:

$$(y - x\tau_i)\frac{\partial v_i}{\partial x} - xv_i\frac{\partial \tau_i}{\partial x} = \tau_i v_i,$$

$$(y - x\tau_i)\frac{\partial v_i}{\partial y} - xv_i\frac{\partial \tau_i}{\partial y} = -v_i.$$

a v_i und τ_i nach der ersten Gleichung (36) voneinander abhängig sind, gibt sich nach Multiplikation mit $\partial\tau_i : \partial y$ und $\partial\tau_i : \partial x$ und Subtraktion:

$$\tau_i\frac{\partial \tau_i}{\partial y} + \frac{\partial \tau_i}{\partial x} = 0.$$

Wenn also im folgenden der Akzentstrich bei τ_i die Differentiation ıch y andeutet, gelten die Differentiationsregeln:

40) $$\frac{\partial \tau_i}{\partial x} = -\tau_i\tau_i', \qquad \frac{\partial \tau_i}{\partial y} = \tau_i'.$$

Nun ergibt sich aus (37) durch Differentiation nach y:

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 U_y = -\tau_3\tau_4\alpha_1\tau_1' - \tau_3\tau_4\alpha_2\tau_2' - \tau_1\tau_2\alpha_3\tau_3' - \tau_1\tau_2\alpha_4\tau_4',$$

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 V_y = \alpha_1\tau_1' + \alpha_2\tau_2' + \alpha_3\tau_3' + \alpha_4\tau_4',$$

enn zur Abkürzung

$$\alpha_1 = (\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4),$$
$$\alpha_2 = (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4),$$
$$\alpha_3 = (\tau_4 - \tau_1)(\tau_4 - \tau_2),$$
$$\alpha_4 = (\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)$$

esetzt wird. Auf Grund der Differentiationsregeln (40) schließt man eraus, daß

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 U_x = \tau_3\tau_4\alpha_1\tau_1\tau_1' + \tau_3\tau_4\alpha_2\tau_2\tau_2 + \tau_1\tau_2\alpha_3\tau_3\tau_3' + \tau_1\tau_2\alpha_4\tau_4\tau_4',$$

$$(\tau_1\tau_2 - \tau_3\tau_4)^2 V_x = -\alpha_1\tau_1\tau_1' - \alpha_2\tau_2\tau_2' - \alpha_3\tau_3\tau_3' - \alpha_4\tau_4\tau_4'$$

ist. Mit Rücksicht auf (37) ist daher

$$(\tau_1\tau_2-\tau_3\tau_4)^3(V_x-UV_y)$$
$$=-(\tau_1-\tau_3)(\tau_1-\tau_4)(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4)[\tau_3\tau_1'+\tau_1\tau_2'-\tau_4\tau_3'-\tau_3\tau_4'],$$
$$(\tau_1\tau_2-\tau_3\tau_4)^3(U_y-VU_x)$$
$$=(\tau_1-\tau_3)(\tau_1-\tau_4)(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4)[\tau_3\tau_4(\tau_1'+\tau_2')-\tau_1\tau_2(\tau_3'+\tau_4')],$$

und außerdem hat man

$$(\tau_1\tau_2-\tau_3\tau_4)^2(1-UV)=(\tau_1-\tau_3)(\tau_1-\tau_4)(\tau_2-\tau_3)(\tau_2-\tau_4).$$

Also kommt:

$$\frac{V_x-UV_y}{1-UV}=-\frac{\tau_3\tau_1'+\tau_1\tau_2'-\tau_4\tau_3'-\tau_3\tau_4'}{\tau_1\tau_2-\tau_3\tau_4},$$

$$\frac{U_y-VU_x}{1-UV}=\frac{\tau_3\tau_4(\tau_1'+\tau_2')-\tau_1\tau_2(\tau_3'+\tau_4')}{\tau_1\tau_2-\tau_3\tau_4}.$$

Nach (39) nimmt daher die Integrabilitätsbedingung diese Gestalt an:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau_3\tau_1'+\tau_1\tau_2'-\tau_4\tau_3'-\tau_3\tau_4'}{\tau_1\tau_2-\tau_3\tau_4}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau_3\tau_4(\tau_1'+\tau_2')-\tau_1\tau_2(\tau_3'+\tau_4')}{\tau_1\tau_2-\tau_3\tau_4}=0.$$

Wenn man die hier noch nötigen Differentiationen machen will, muß man beachten, daß infolge von (40)

$$\frac{\partial\tau_i'}{\partial x}=\frac{\partial^2\tau_i}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\tau_i}{\partial x}=-\frac{\partial\tau_i\tau_i'}{\partial y}$$

ist. Demnach gelten die Regeln:

$$\frac{\partial\tau'}{\partial x}=-\tau_i'^2-\tau_i\tau_i'', \qquad \frac{\partial\tau_i'}{\partial y}=\tau_i'',$$

wenn nach wie vor die Akzente Differentiationen nach y andeuten. Beachtet man dies, so liefert die Ausrechnung *eine überraschend einfache Gestalt der Integrabilitätsbedingung*:

$$\tau_1''+\tau_2''+\tau_3''+\tau_4''=0. \tag{41}$$

Hiernach ist die Summe aller τ_i eine hinsichtlich y ganze lineare Funktion:

$$\sum\tau_i=\alpha y+\beta,$$

wo α und β nur von x abhängen. Differentiation nach x liefert nur wegen (40):

$$\sum\tau_i\tau_i'=-\frac{d\alpha}{dx}y-\frac{d\beta}{dx},$$

und hieraus folgt durch Integration hinsichtlich y:

$$\sum\tau_i^2=-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dx}y^2-\frac{d\beta}{dx}y+\gamma,$$

o γ nur von x abhängt. In derselben Weise findet man weiterhin durch
wechselnde Differentiation nach x und Integration nach y, daß die
umme

$$\sum \tau_i^n$$

ir jedes positive ganzzahlige n hinsichtlich y eine ganze Funktion n-ten
rades ist.

Nun sind $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ die Wurzeln der biquadratischen Gleichung für τ:

$$(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_4) = 0,$$

ie wir so schreiben:

$$\tau^4 - a_1\tau^3 + a_2\tau^2 - a_3\tau + a_4 = 0. \tag{42}$$

ie Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 sind die ganzen symmetrischen Funktionen
rsten bis vierten Grades der τ_i, und zwischen ihnen und den Potenz-
ımmen der τ_i bestehen bekanntlich die Beziehungen:

$$\sum \tau_i = a_1,$$

$$\sum \tau_i^2 = a_1^2 - 2a_2,$$

$$\sum \tau_i^3 = a_1^3 - 3a_1a_2 + 3a_3,$$

$$\sum \tau_i^4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 2a_2^2 - 4a_4.$$

a links nach dem Vorhergehenden ganze Funktionen ersten bis vierten
rades hinsichtlich y stehen, lehren diese Gleichungen nacheinander, daß
a_1, a_2, a_3, a_4 hinsichtlich y ebenfalls ganze Funktionen ersten bis vierten
rades sind. Diese Funktionen hängen außerdem noch von x ab.

Nun kehren wir zu den Annahmen in Nr. 14 zurück. Nach ihnen
t $\tau_i = -u_i : v_i$. Also zeigt (42), daß alle vier Wertepaare u_i, v_i einer
leichung

$$u^4 + a_1u^3v + a_2u^2v^2 + a_3uv^3 + a_4v^4 = 0$$

u, v genügen, deren Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 von x und y abhängen
nd insbesondere hinsichtlich y ganze Funktionen vom ersten bis vierten
rade sind. Setzt man in Gemäßheit der zweiten Gleichung (34) für y
en Wert $(1 - ux) : v$ ein, so treten in a_1, a_2, a_3, a_4 die Nenner v, v^2, v^3, v^4
uf. Da aber mit diesen Potenzen multipliziert wird, ergibt sich eine
leichung

$$F(u, v, x) = 0,$$

eren linke Seite eine hinsichtlich u und v ganze (aber nicht mehr not-
endig homogene) Funktion vierten Grades ist. Man erkennt nun leicht,

daß vermöge der Substitution $y = (1 - ux) : v$ auch x herausfallen muß. Denn u_i und v_i sind nach (34) durch das Gleichungenpaar

$$\varphi_i(u_i, v_i) = 0, \qquad u_i x + v_i y = 1$$

als Funktionen von x und y definiert. Mithin muß $F(u_i, v_i, x) = 0$ eine Folge dieses Paares sein. Da aber y darin nicht vorkommt, muß $F(u_i, v_i, x) = 0$ eine Folge von $\varphi_i = 0$ allein sein, d. h. x kommt darin auch nicht vor.

Mithin erfüllen alle vier Funktionenpaare u_i, v_i eine und dieselbe Gleichung

$$F(u, v) = 0$$

in u, v, deren linke Seite eine ganze Funktion vierten Grades in u, v ist.

Dies hat eine einfache geometrische Bedeutung. Denn die u_i, v_i sind nach Nr. 14 die Linienkoordinaten der Geradenscharen, die sich bei der Projektion der beiden als vorhanden angenommenen konjugierten Kurvennetze auf die xy-Ebene ergeben. Mithin ist $F(u, v) = 0$ in Linienkoordinaten die Gleichung einer *Kurve vierter Klasse* in der xy-Ebene und jene Geradenscharen gehören sämtlich zu den Tangenten dieser Kurve.

Daß wir in Nr. 14 diejenigen Flächen ausschlossen, auf denen $s =$ ist, hat keine Bedeutung, da sich eine derartige Fläche durch Drehung um die z-Achse in eine Fläche überführen läßt, auf der $s \neq 0$ ist. Demnach besagt die Integrabilitätsbedingung:

Wenn eine nicht abwickelbare Fläche zwei verschiedene konjugierte Kurvennetze hat, die sich vermöge senkrechter Projektion auf die xy-Ebene als geradlinige Netze darstellen, sind die Geraden dieser Netze in der xy-Ebene samt und sonders Tangenten einer gewissen Kurve vierter Klasse.

Hiermit stehen die Ergebnisse von Nr. 8 keineswegs im Widerspruche. Denn wenn eine Fläche einfach unendlich viele geradlinig projizierbare konjugierte Kurvennetze hat, stellen sich die Kurven zweier derartiger Netze bei der Projektion nach Nr. 8 als die Tangenten zweier Kegelschnitte dar, und diese beiden Kegelschnitte machen zusammen eine Kurve vierter Klasse aus.

16. **Bestimmung von Flächen mit zwei verschiedenen sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurvennetzen.** Nach Nr. 10 können wir alle Flächen bestimmen, die ein sich geradlinig projizierendes konjugiertes Kurvennetz haben, sobald die Projektion dieses Netzes gegeben ist. Im vorliegenden Falle gehen wir nun von einer Kurve vierter Klasse aus, deren Gleichung in den Linienkoordinaten u,

$$F(u, v) = 0$$

i, indem F eine ganze Funktion vierten Grades von u, v bedeute. Ist ann P oder (x, y) die Projektion eines beliebigen Flächenpunktes, so hen von P vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 an die Kurve. Ihre Berührungsnkte seien Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Die Linienkoordinaten der Tangenten seien e Wertepaare u_i, v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, so daß wieder wie in Nr. 14

$$u_i x + v_i y = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{42}$$

t. Bewegt sich P in der xy-Ebene, so bewegen sich Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 auf r Kurve, und es ist

$$F(u_i, v_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

emnach ist jede der vier Größen v_i als Funktion der zugehörigen Größe u_i u betrachten.

Vorläufig fassen wir nur zwei der von P an die Kurve gehenden angenten ins Auge, die Tangenten t_1 und t_2. Sie werden durch (42) ir $i = 1, 2$ dargestellt, indem dabei v_1 und v_2, wie gesagt, die durch $(u_1, v_1) = 0$ und $F(u_2, v_2) = 0$ bestimmten Funktionen von u_1 und u_2 nd, so daß u_1 und u_2 die Parameter der Geradenscharen t_1 und t_2 beeuten. In Nr. 10 dagegen wurden diese Geradenscharen durch Gleichungen on der Form

$$\varphi_1(u)x + \psi_1(u)y + \chi_1(u) = 0,$$
$$\varphi_2(v)x + \psi_2(v)y + \chi_2(v) = 0$$

it den Parametern u und v dargestellt. Wenn wir also die Ergebnisse on Nr. 10 anwenden wollen, haben wir u und v durch u_1 und u_2 zu rsetzen, und die Vergleichung mit (42) lehrt, daß an die Stelle von $_1, \psi_1, \chi_1$ jetzt $u_1, v_1, -1$ und an die Stelle von $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ jetzt $u_2, v_2, -1$ reten. Die Gleichung für z in (23), Nr. 10, enthält willkürliche Funkionen U und V von u bzw. v allein. An ihre Stelle treten jetzt Funkonen von u_1 bzw. u_2 allein, die wir mit $-\varrho_1$ und $-\varrho_2$ bezeichnen ollen. Demnach liefern die Gleichungen (23) jetzt die Fläche:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \qquad y = \dfrac{u_1 - u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \int \varrho_1 u_1 \, du_1 + \int \varrho_2 u_2 \, du_2 \\ v_1 & v_2 & \int \varrho_1 v_1 \, du_1 + \int \varrho_2 v_2 \, du_2 \\ 1 & 1 & \int \varrho_1 \, du_1 \quad + \int \varrho_2 \, du_2 \end{vmatrix}}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \end{cases} \tag{43}$$

ies ist eine Darstellung mittels der Parameter u_1, u_2, indem v_1 und v_2 urch $F(u_1, v_1) = 0$ und $F(u_2, v_2) = 0$ als Funktionen von u_1 oder u_2 egeben sind. Die Funktion ϱ_1 von u_1 und die Funktion ϱ_2 von u_2 dürfen ber jetzt nicht mehr willkürlich gewählt werden, vielmehr handelt es ch darum, sie so zu bestimmen, daß dieselbe Fläche auch eine ent-

sprechende zweite Darstellung zuläßt, die sich ergibt, wenn man statt der Tangenten t_1 und t_2 die Tangenten t_3 und t_4 benutzt:

$$(44)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{v_3 - v_4}{u_3 v_4 - u_4 v_3}, \qquad y = \dfrac{u_3 - u_4}{u_3 v_4 - u_4 v_3}, \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} u_3 & u_4 & \int \sigma_3 u_3 \, du_3 + \int \sigma_4 u_4 \, du_4 \\ v_3 & v_4 & \int \sigma_3 v_3 \, du_3 + \int \sigma_4 v_4 \, du_4 \\ 1 & 1 & \int \sigma_3 \, du_3 \quad + \int \sigma_4 \, du_4 \end{vmatrix}}{u_3 v_4 - u_4 v_3}. \end{cases}$$

Hierin sind u_3 und u_4 die Parameter, indem v_3 und v_4 durch $F(u_3, v_3) =$ und $F(u_4, v_4) = 0$ als Funktionen von u_3 oder u_4 gegeben sind. Die Funktionen σ_3 und σ_4 hängen nur von u_3 bzw. u_4 ab.

Somit bleibt es noch übrig, die Funktionen

$$\varrho_1(u_1), \qquad \varrho_2(u_2), \qquad \sigma_3(u_3), \qquad \sigma_4(u_4)$$

so zu ermitteln, daß die Gleichungen (43) und (44) dieselbe Fläche darstellen.

Was zunächst die Koordinaten x und y betrifft, so stimmen diese in (43) und (44) in der Tat überein, wenn man nur, wie es ja sein soll, alle vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 von derselben Stelle ausgehen läßt, d. h. wenn man die Gleichungen (42) vorschreibt. Man kann aus den beiden ersten x und y als Funktionen von u_1 und u_2 berechnen und in die dritte und vierte einsetzen, wodurch sich eben die Beziehungen zwischen u_1, u_2 und u_3, u_4 ergeben, nämlich die Gleichungen

$$\frac{u_1 - u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} = \frac{u_3 - u_4}{u_3 v_4 - u_4 v_3}, \qquad \frac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} = \frac{v_3 - v_4}{u_3 v_4 - u_4 v_3},$$

da hierin die v_i die durch die Gleichung $F(u_i, v_i) = 0$ gegebenen Funktionen der u_i sind.

Nun sind nur noch die Werte von z in (43) und (44) zu vergleichen. Was die darin vorkommenden Integrale betrifft, so gehe man von einer beliebig gewählten Anfangslage (x_0, y_0) des Punktes P aus. Die von diesem Punkte P_0 an die Kurve vierter Klasse gezogenen Tangenten $t_1^0, t_2^0, t_3^0, t_4^0$ mögen die Berührungspunkte $Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, Q_4^0$ und die Linienkoordinatenpaare u_i^0, v_i^0 $(i = 1, 2, 3, 4)$ haben. Als Anfangswerte der Veränderlichen u_i in den Integralen dienen dann die Werte u_i^0. In der xy-Ebene lasse man den Punkt von P_0 aus irgendeine Bahn nach der beliebigen Stelle P hin beschreiben. Dabei bewegen sich $Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, Q_4^0$ auf der Kurve vierter Klasse nach den Stellen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Auf diese Weise gelangen wir in den Werten von z zu bestimmten Integralen, und wir behaupten, daß man die Funktionen $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_3, \sigma_4$ immer so wählen kann, daß die Werte von z übereinstimmen, wie auch immer die Bahn von P_0 nach P angenommen worden sei.

Nach den beiden ersten Gleichungen (43) gibt nämlich die dritte:

$$z = -x(\int \varrho_1 u_1 du_1 + \int \varrho_2 u_2 du_2) - y(\int \varrho_1 v_1 du_1 + \int \varrho_2 v_2 du_2) + (\int \varrho_1 du_1 + \int \varrho_2 du_2).$$

ntsprechend folgt aus (44):

$$z = -x(\int \sigma_3 u_3 du_3 + \int \sigma_4 u_4 du_4) - y(\int \sigma_3 v_3 du_3 + \int \sigma_4 v_4 du_4) + (\int \sigma_3 du_3 + \int \sigma_4 du_4).$$

ezeichnen wir σ_3 und σ_4 mit $-\varrho_3$ und $-\varrho_4$, so findet also Übereinimmung statt, falls

5) $$x\sum\int \varrho_i u_i du_i + y\sum\int \varrho_i v_i du_i - \sum\int \varrho_i du_i = 0$$

. Wir behaupten, daß dies erfordert, daß die drei Summen einzeln eich Null seien. Denn der Punkt P oder (x, y) kann weiterhin beliebig riieren. Da dann auch der zugehörige Zuwachs der linken Seite von (45) eich Null sein muß, wird gefordert:

$$dx\sum\int \varrho_i u_i du_i + dy\sum\int \varrho_i v_i du_i + x\sum \varrho_i u_i du_i + y\sum \varrho_i v_i du_i - \sum \varrho_i du_i = 0,$$

nn in der zweiten Zeile die du_i die zu den Inkrementen dx, dy gerige Inkremente der u_i bedeuten. Diese Gleichung kann man so zummenfassen:

$$dx\sum\int \varrho_i u_i du_i + dy\sum\int \varrho_i v_i du_i + \sum \varrho_i (u_i x + v_i y - 1) du_i = 0.$$

a aber die Gleichungen (42) bestehen, ist die letzte Summe gleich Null. a ferner dx und dy willkürlich wird, kommt einzeln:

6) $$\sum\int \varrho_i u_i du_i = 0, \qquad \sum\int \varrho_i v_i du_i = 0,$$

d hieraus folgt nach (45) weiterhin, daß auch

7) $$\sum\int \varrho_i du_i = 0$$

in muß. Da die Gleichungen (46) und (47) die Gleichung (45) nach ch ziehen, handelt es sich also nur darum, die ϱ_i so als Funktionen der u_i bestimmen, daß die Gleichungen (46) und (47) erfüllt werden.

Dies aber läßt sich durch Anwendung des Abelschen Theorems erichen. Zunächst kann man es auf den besonderen Fall einer ebenen urve vierter Ordnung anwenden, die von einer beweglichen Geraden gehnitten wird. Dann besagt es bekanntlich, daß die Summen gewisser f die vier Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve bezüglicher Integrale

gleich Null sind, welche Bewegung auch immer die Gerade ausführe mag. Hiervon aber brauchen wir die duale Umformung, indem wir wi oben eine Kurve vierter Klasse $F(u, v) = 0$ annehmen und an sie vo dem beweglichen Punkte P oder (x, y) aus die vier Tangenten ziehe Dann besagt das Theorem, daß für jede Bahn des Punktes

$$\sum \int \frac{u_i\, du_i}{F_{v_i}} = 0, \quad \sum \int \frac{v_i\, du_i}{F_{v_i}} = 0, \quad \int \frac{du_i}{F_{v_i}} = 0 \tag{48}$$

ist. Dabei bedeutet F_{v_i} die partielle Ableitung von $F(u_i, v_i)$ nach v_i.

Die Vergleichung von (48) mit (46) und (47) zeigt, daß diese Forde rungen insbesondere durch die Annahmen

$$\varrho_i = \frac{1}{F_{v_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4$$

befriedigt werden. Infolge hiervon ist in der Tat jedes ϱ_i eine Funktio des zugehörigen u_i allein, da v_i durch $F(u_i, v_i) = 0$ als Funktion von u definiert ist.

Indem wir daran erinnern, daß oben σ_3 und σ_4 durch $-\varrho_3$ und $-\varrho$ ersetzt wurden, finden wir also, *daß sich eine Fläche von der gesuchte Art, d. h. eine Fläche mit zwei verschiedenen sich geradlinig projizierende konjugierten Kurvennetzen in der folgenden Form darstellen läßt*:

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \qquad y = \frac{u_1 - u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \int \frac{u_1\, du_1}{F_{v_1}} + \int \frac{u_2\, du_2}{F_{v_2}} \\ v_1 & v_2 & \int \frac{v_1\, du_1}{F_{v_1}} + \int \frac{v_2\, du_2}{F_{v_2}} \\ 1 & 1 & \int \frac{du_1}{F_{v_1}} + \int \frac{du_2}{F_{v_2}} \end{vmatrix}}{u_1 v_2 - u_2 v_1}; \end{aligned}\right. \tag{49}$$

dieselbe Fläche läßt sich auch so darstellen:

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{v_3 - v_4}{u_3 v_4 - u_4 v_3}, \qquad y = \frac{u_3 - u_4}{u_3 v_4 - u_4 v_3}, \\ z &= -\frac{\begin{vmatrix} u_3 & u_4 & \int \frac{u_3\, du_3}{F_{v_3}} + \int \frac{u_4\, du_4}{F_{v_4}} \\ v_3 & v_4 & \int \frac{v_3\, du_3}{F_{v_3}} + \int \frac{v_4\, du_4}{F_{v_4}} \\ 1 & 1 & \int \frac{du_3}{F_{v_3}} + \int \frac{du_4}{F_{v_4}} \end{vmatrix}}{u_3 v_4 - u_4 v_3}. \end{aligned}\right. \tag{50}$$

abei sind u_1, u_2 die Parameter der ersten Darstellung und u_3, u_4 die r zweiten. Alle Wertepaare u_i, v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ genügen derselben liebig annehmbaren Gleichung in u, v:

$$F(u, v) = 0,$$

ren linke Seite eine ganze Funktion vierten Grades von u, v ist, so ıß jedes v_i eine Funktion des zugehörigen u_i bedeutet. Die sich gerad- nig projizierenden konjugierten Kurvennetze der Fläche sind die der arameterkurven $(u_1), (u_2)$ und $(u_3), (u_4)$.

17. Vollständige Erledigung der Aufgabe, die Flächen mit vei verschiedenen sich geradlinig projizierenden konjugierten urvennetzen zu bestimmen. Dadurch, daß wir die ϱ_i gleich den ziproken Werten der F_{v_i} setzten, gelangten wir soeben zu Flächen von r gesuchten Art. Jetzt handelt es sich darum, die *allgemeinsten* Funk- onen $\varrho_i(u_i)$ zu ermitteln, vermöge derer den Forderungen (46) und (47) nügt werden kann.

Die in diesen Forderungen vorkommenden Integrale formen wir um, dem wir darin die Differentiale dx und dy einführen. Nach (42) ist:

$$x\,du_i + y\,dv_i + u_i\,dx + v_i\,dy = 0,$$

nd wegen $F(u_i, v_i)$ ist außerdem:

$$F_{u_i}\,du_i + F_{v_i}\,dv_i = 0.$$

us diesen beiden Gleichungen folgt

$$du_i = -\frac{F_{v_i}(u_i\,dx + v_i\,dy)}{x F_{v_i} - y F_{u_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

etzen wir diese Werte in die Kurvenintegrale unter (48) ein, so kommt

$$\sum \int \frac{u_i(u_i\,dx + v_i\,dy)}{x F_{v_i} - y F_{u_i}} = 0, \qquad \sum \int \frac{v_i(u_i\,dx + v_i\,dy)}{x F_{v_i} - y F_{u_i}} = 0,$$

$$\sum \int \frac{u_i\,dx + v_i\,dy}{x F_{v_i} - y F_{u_i}} = 0,$$

ährend die Forderungen (46) und (47) diese werden:

$$\sum \int \frac{\varrho_i F_{v_i} u_i(u_i\,dx + v_i\,dy)}{x F_{v_i} - y F_{u_i}} = 0, \qquad \sum \int \frac{\varrho_i F_{v_i} v_i(u_i\,dx + v_i\,dy)}{x F_{v_i} - y F_{u_i}} = 0,$$

$$\sum \int \frac{\varrho_i F_{v_i}(u_i\,dx + v_i\,dy)}{x F_{v_i} - y F_{u_i}} = 0.$$

)a diese Kurvenintegrale längs jedes Weges in der xy-Ebene genommen erden können, dürfen die Integralzeichen fortgelassen werden. Setzen ir nun zur Abkürzung

$$\frac{u_i\,dx + v_i\,dy}{x F_{v_i} - y F_{u_i}} = d\lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so ist also einerseits

$$(51) \qquad \Sigma u_i d\lambda_i = 0, \qquad \Sigma v_i d\lambda_i = 0, \qquad \Sigma d\lambda_i = 0,$$

während andererseits gefordert wird:

$$(52) \qquad \Sigma \varrho_i F_{v_i} u_i d\lambda_i = 0, \qquad \Sigma \varrho_i F_{v_i} v_i d\lambda_i = 0, \qquad \Sigma \varrho_i F_{v_i} d\lambda_i = 0.$$

Da nun nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

gleich Null sind, bestimmen die Gleichungen (51) die Verhältnisse der $d\lambda$ vollkommen, so daß die Gleichungen (52) nur dann mit den Gleichungen (51) vereinbar sind, wenn alle vier Größen $\varrho_i F_{v_i}$ übereinstimmen, d. h. wenn die ϱ_i zu den reziproken Werten der F_{v_i} proportional sind. Weil aber ϱ nur von u_i abhängen darf, muß der Proportionalitätsfaktor eine Konstante sein. Die allgemeinste statthafte Annahme ist mithin

$$\varrho_i = \frac{c}{F_{v_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

wo c eine willkürliche Konstante bedeutet, die für alle vier ϱ_i dieselbe ist. In voriger Nummer war insbesondere

$$\varrho_i = \frac{1}{F_{v_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gewählt worden. Daraus entspringt der Satz:

Alle Flächen mit zwei verschiedenen sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurvenscharen ergeben sich aus den in Nr. 16 ermittelten Flächen von dieser Art, wenn die z-Koordinate mit einer willkürlichen Konstante multipliziert wird.

Je nach der Wahl der Kurve vierter Klasse $F(u, v) = 0$ in der xy-Ebene gehen sehr verschiedenartige Flächen hervor. Da die Kurve zerfallen kann, treten noch besonders bemerkenswerte Flächen auf. Wir haben aber nicht die Absicht, darauf näher einzugehen.

18. Flächen mit konjugierten Kurvennetzen, die sich vermöge Perspektive geradlinig abbilden. Wir betrachten wieder die ganze Familie derjenigen Flächen, die mindestens ein konjugiertes Kurvennetz haben, das sich geradlinig projiziert. Statt der senkrechten Projektion auf die xy-Ebene hätten wir auch eine schiefe Parallelprojektion anwenden können. Dann tritt an die Stelle der xy-Ebene eine zur neuen Projektionsrichtung senkrechte Ebene. Man kann also die Flächenfamilie so kennzeichnen: Jede Fläche der Familie läßt sich durch zwei gewisse

haren von Ebenen, die denselben unendlich fernen Punkt gemein haben, einem konjugierten Kurvennetze schneiden.

Das Konjugiertsein ist nun ein bei allen projektiven Transformationen s Raumes invarianter Begriff. Vermöge projektiver Transformation gennen wir demnach die *Familie derjenigen Flächen, von denen jede rch zwei Ebenenscharen mit einem gemeinsamen Punkte O in einem njugierten Kurvennetze geschnitten wird.*

Führt man eine Zentralprojektion (Perspektive) mit dem Zentrum uge) O auf irgendeine Tafel aus, so ergibt sich: Die neue Flächenmilie besteht aus allen *Flächen, die ein konjugiertes Kurvennetz haben, ssen perspektives Bild geradlinig ist.* Insbesondere macht die Bestimmung r Flächen, die zwei oder unendlich viele konjugierte Kurvennetze mit radlinigen perspektiven Bildern haben, nach dem Vorhergehenden (Nr. 17 d Nr. 10) keinerlei Schwierigkeiten.

Jede der beiden Ebenenscharen durch O umhüllt einen Kegel K_1 oder , mit der Spitze O. Deshalb kann man die Flächenfamilie auch so nnzeichnen: *Zu jeder Fläche der Familie gehören zwei Kegel K_1 und $_2$ mit gemeinsamer Spitze O derart, daß von jedem Flächenpunkte ei die Kegel K_1 und K_2 berührende konjugierte Tangenten ausgehen.*

19. Das duale Gegenstück der Flächen mit einem sich geradnig projizierenden konjugierten Kurvennetze. Nunmehr führen r eine Dualität aus, vermöge deren der Punkt O in die unendlich ferne ene verwandelt wird. Bei ihr gehen die Kegel K_1 und K_2 in zwei endlich ferne Kurven $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ über. Die Punkte P einer der beachteten Flächen verwandeln sich in die Tangentenebenen π einer neuen äche, die Tangentenebenen p der Punkte P in die Punkte Π der neuen äche. Die Gerade OP geht in die unendlich ferne Gerade der Tangentenene π über. Die Ebenen durch OP, die die Kegel K_1 und K_2 berühren, fern also die Punkte, in denen die Tangentenebene π die unendlich rnen Kurven $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ schneidet. Da der Begriff des Konjugiertseins ch gegenüber einer Dualität invariant ist, gelangt man also zu einer ächenfamilie von folgender Art: In der unendlich fernen Ebene liegen ei Kurven $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$. Die Tangentenebene π eines Flächenpunktes Π hneidet alsdann die Kurven $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ stets in zwei Punkten, nach nen konjugierte Tangenten des Flächenpunktes Π laufen. Nach einem tze von Lie[4]) sind demnach die neuen Flächen *Schiebungsflächen*; die zeugenden Kurven dieser Flächen haben Tangenten, die nach den Kurven und $\varkappa_2$ in der unendlich fernen Ebene gehen. *Somit sind die Schie-*

[4]) *Die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem*, Berichte der them.-phys. Kl. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1896, S. 141—198, insbes. S. 166.

bungsflächen ein duales Gegenstück der von uns untersuchten Fläche mit geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen.

Allerdings sind dabei zwei Einschränkungen zu machen: Zunächst stehen die *abwickelbaren* Flächen abseits, weil sie bei Ausübung einer Dualität ausarten. Wir wissen aber, daß nach Nr. 11 jede abwickelbare Fläche als eine Fläche mit unendlich vielen geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen zu betrachten ist. Außerdem gibt es auf der anderen Seite Schiebungsflächen, die abwickelbar sind, nämlich die Zylinder. Die zweite Einschränkung betrifft die *geradlinigen* Flächen. Nach Nr. 12 sind sie als Flächen zu betrachten, die ein ausgeartetes und sich geradlinig projizierendes konjugiertes Kurvennetz haben. Diesen Flächen stehen dual keine Schiebungsflächen gegenüber.

Wird von diesen Sonderfällen abgesehen, so kann man die Theorie der Flächen mit sich geradlinig projizierenden konjugierten Kurvennetzen durch Dualität aus der Theorie der Schiebungsflächen ableiten. Das wäre aber ein ziemlicher Umweg. Lie hat a. a. O. alle Schiebungsflächen mit mehrfachen Erzeugungen ermittelt. Durch duale Umformung könnten daraus die Ergebnisse von Nr. 8, 9, 16 und 17 abgeleitet werden. Aber einerseits ist es erwünscht, die Sätze dieser Nummern geradezu nachzuweisen, und andererseits lassen sich gegen die Strenge der Lieschen Beweisführungen Einwände erheben[5]). Überdies spielt bei den Lieschen Betrachtungen das Unendlichferne eine Rolle, während es bei den Flächen mit geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen nicht vorkommt. Ich habe a. a. O. die Lieschen Ergebnisse streng begründet. Aber es wäre umständlich und schleppend, dies dual auf die hier betrachteten Flächen zu übertragen, da man ebensogut oder sogar besser die entsprechenden Untersuchungen sofort bei unseren Flächen beginnen kann. Dies erklärt es, daß die Berechnung der Integrabilitätsbedingung in Nr. 1 im wesentlichen dieselbe ist, die ich im Falle der Schiebungsflächen (a. a. O. S. 77 u. f.) durchgeführt hatte.

Im übrigen sei noch hervorgehoben, daß durch den Hinweis auf die Dualität zwischen den beiden Flächenfamilien keineswegs alles, was in vorhergehenden zur Sprache gekommen ist, erledigt werden könnte.

Seinerzeit habe ich (a. a. O. S. 90) darauf aufmerksam gemacht, daß die genauere Untersuchung der verschiedenen Arten von Schiebungsflächen mit mehrfachen Erzeugungen sowohl in geometrischer als auch in analytischer Hinsicht lohnend sein würde. Soviel mir bekannt, hat dies nun

---

[5]) Vgl. meine Abhandlung *Das Abelsche Theorem und das Liesche Theorem über Translationsflächen*, Acta mathematica 28 (1903), S. 65—91, insbes. S. 66, 67.

mal Beachtung gefunden [6]). Ich möchte es wiederholen und hinzufügen, *ß es wünschenswert wäre, wenn die im vorhergehenden bestimmten ächen mit mehreren geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen nauer erforscht würden.* Jede einzelne Art gibt durch ihre Beziehung m Abelschen Theorem (Nr. 16) und zur Theorie der Kurven vierter asse Anlaß zu vielseitiger mathematischer Betätigung.

Berlin-Dahlem, im November 1921.

---

[6]) J. Eiesland, *On a certain class of algebraic translation-surfaces*, American urnal of Mathematics 29 (1907), S. 363—386.

(Eingegangen am 13. November 1921.)

Fundamentalsatz der Tensorrechnung.

Von

Alexander Weinstein in Zürich.

§ 1.

Problemstellung.

Mit jeder Koordinatentransformation in einer beliebigen n-dimensi nalen Mannigfaltigkeit ist an jeder einzelnen Stelle P eine lineare hom gene, nämlich die der Differentiale verknüpft, und zwar setzen sich bei Hintereinanderausführen der Koordinatentransformationen die Matrizen der zugehörigen linearen zusammen. In diesem Umstande ist der Grun für die Möglichkeit der Einführung des Begriffs kontravarianter Tens im Punkte P zu erblicken[1]). Ist irgendwie mit jeder Transformation d Koordinaten eine Matrix M' *unter Wahrung der Zusammensetzung bedingung* verknüpft, so kann diese Zuordnung ebenfalls zum Ausgang punkt für die Definition eines neuen Tensorbegriffs genommen werde welcher dem eben erwähnten als gleichberechtigt zur Seite tritt. Setze wir voraus, daß M' ebenso wie M nur von den Gliedern erster Ordnu der Transformation in P abhängt, so entspricht jeder Matrix M eine b stimmte Matrix M' in solcher Weise, daß für zwei willkürliche Matrize M_1 und M_2 stets die Relation

$$(M_1 M_2)' = M_1' M_2' \tag{1}$$

gilt[2]). Wir werden im folgenden nur Koordinatentransformationen vo positiver Funktionaldeterminante (d. h. solche, bei welchen der Drehungs sinn erhalten bleibt) betrachten. Um die Gesamtheit von allen unter diese Einschränkung möglichen Tensorbegriffen überblicken zu können, habe wir offenbar folgendes Problem zu lösen:

Fundamentalproblem. *Alle Gesetze zu finden, nach welchen ma einer willkürlichen Matrix M, deren Determinante $|M|$ positiv ist, ein*

[1]) Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Vierte Auflage (1921), S. 92.

[2]) Wir benutzen die übliche Symbolik der Matrizenrechnung.

atrix M' (von nichtverschwindender Determinante $|M'|$) in solcher eise zuordnen kann, daß für zwei beliebige Matrizen M_1 und M_2 stets e Beziehung (1) besteht.

Durch jedes solche Gesetz wird die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ der Matrizen von sitiver Determinante auf eine gewisse Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'$ von Matrizen, ren Determinante nicht verschwindet, abgebildet, was wir durch das Symbol

$$\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$$

deuten wollen.

Eine Reihe von Gesetzen, nach welchen eine solche Abbildung zuande kommen kann, ist uns bekannt:

I. Jeder Matrix M (aus $\mathfrak{M}$) wird eine Matrix M' zugeordnet nach r Gleichung

$$M' = U_0 M U_0^{-1} \qquad (|U_0| \neq 0),$$

obei U_0 eine beliebige, aber feste, von M unabhängige Matrix bedeutet.

II. Jeder Matrix M wird die zu ihr kontragrediente Matrix $\breve{M}$ zuordnet. Es ist also

$$M' = \breve{M},$$

$\breve{M}$ die transponierte zur Matrix M^{-1} bedeutet.

III. M' entsteht aus M durch Multiplikation von M mit einer festen, n M unabhängigen Potenz α der Determinante von M:

$$M' = M \cdot |M|^{\alpha}.$$

Die Tensorrechnung in der Gestalt, wie sie im oben zitierten Buch n Herrn Weyl dargestellt ist, verwendet die linearen Transformationen t den Matrizen M' unter II und III (letztere für $\alpha = 1$) zur Auffellung des Begriffs des kovarianten Tensors bzw. der Tensordichte. gibt dagegen keine Veranlassung zu einem neuen Tensorbegriff. Dieses setz bedeutet lediglich eine simultane Koordinatentransformation, angendt auf alle Koordinatensysteme überhaupt.

Da in der gesamten Tensorrechnung nur lineare Transformationen ftreten, deren Matrizen sich aus den erwähnten zusammensetzen, liegt nahe zu vermuten, daß I, II und III die einzigen Elementargesetze d, nach welchen eine Abbildung $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ zustande kommen kann. Die stätigung der Richtigkeit dieser Vermutung würde bedeuten, daß es bei ansformationen mit positiven Funktionaldeterminanten keine weiteren öglichkeiten gibt neue Tensorarten einzuführen, m. a. W., daß das Verren der Tensorrechnung erschöpfend sei. Diesen Satz könnte man als *ndamentalsatz der Tensorrechnung* bezeichnen.

Wir werden nun zum folgenden Resultat gelangen: Bei jeder Zuordng $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ entsteht M' aus M entweder nach der Gleichung

$$M' = U_0 M U_0^{-1} \cdot |M|^{\alpha}$$

(Kombination der Gesetze I und III), oder nach der Gleichung

$$M' = U_0 \breve{M} U_0^{-1} \cdot |M|^{\alpha}$$

(Kombination der Gesetze I, II und III). Außerdem gibt es nur noc Abbildungen $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$, die man als ausgeartet zu bezeichnen hat. S kommen (im einfachsten Fall) dadurch zustande, daß man mit jed linearen Transformation der Matrix M ($|M| > 0$) die Matrix M' d folgenden Transformation $\xi_i \to \xi_i^*$ von n einzelnen Variablen ξ_i verknüpf

$$\xi_i^* = |M|^{r_i} \xi_i, \quad \text{also} \quad M' = \begin{pmatrix} |M|^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |M|^{r_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |M|^{r_n} \end{pmatrix}$$

setzt. (Dabei bedeuten die r_i willkürliche Konstanten.)

Die genaue Formulierung dieses neuen Zuordnungsgesetzes, welch keine für die Tensorrechnung brauchbaren linearen Transformationen liefer wird in § 6 angegeben[3]).

Die Lösung der gestellten Aufgabe, zu deren Bewältigung mir He Professor Weyl die Richtung wies, wird wesentlich erleichtert, wenn ma zunächst mit S. Lie nur Matrizen betrachtet, welche unendlich wenig vo der Identität abweichen. Eine Integration liefert hernach die Zuordnung gesetze für alle Matrizen mit positiver Determinante, wie dies in § 6 aus einandergesetzt werden soll.

Für unsere Betrachtungen ist folgende Tatsache von Bedeutung: Sin

$$M_s = E + sA \quad \text{und} \quad M_t = E + tB$$

zwei zu der Identität E benachbarte Matrizen, so ist die Matri $M_t^{-1} M_s^{-1} M_t M_s$ durch folgende Gleichung gegeben

$$M_t^{-1} M_s^{-1} M_t M_s = E + \varepsilon(AB - BA) \qquad (\varepsilon = st)$$

---

[3]) Eine Abbildung nach diesem Gesetze wäre wohl nicht mehr als Ausnahmefal zu betrachten, wenn man das Fundamentalproblem durch folgende allgemeinere Auf gabe ersetzt hätte: Jeder Matrix M von der n-ten Ordnung soll man eine Matrix M von einer beliebigen, aber festen Ordnung n' unter Wahrung der Zusammensetzungs bedingung (1) zuordnen. — Die in dieser Arbeit befolgte Methode erlaubt diese Frage außer für $n' = n$, noch für $n' = 1$ zu beantworten. Man gelangt dabei zum folgenden aus der Invariantentheorie wohlbekannten Resultat:

Es sei jeder Matrix M ($|M| \neq 0$) von der n-ten Ordnung eine Zahl $\varphi(M)$ i der Weise zugeordnet, daß für beliebige Matrizen M_1 und M_2 die Gleichung

$$\varphi(M_1 M_2) = \varphi(M_1)\varphi(M_2)$$

besteht. Die einzige Funktion φ, welche dieser Bedingung genügt, ist eine Pote der Determinante von M:

$$\varphi(M) = |M|^{\alpha}$$

mit festem Exponenten α.

Die aus zwei willkürlichen Matrizen A und B gebildete Matrix $B - BA$) spielt bei den folgenden Überlegungen eine wichtige Rolle. ir wollen $AB - BA$ als das vektorielle Produkt von A mit B be- chnen und dafür das Symbol $[AB]$ gebrauchen.

§ 2.

Linearisierung des Fundamentalproblems.

Bei jeder Abbildung $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ geht, wegen der Voraussetzung $|M'| \neq 0$, Identität E in sich selbst über. Daraus folgt, daß jeder zu E be- chbarten Matrix $M = E + \varepsilon A$ eine ebensolche $M' = E + \varepsilon \bar{A}$ entspricht. rchläuft M alle zu E benachbarten Matrizen, so durchläuft A die Ge- ntheit $\mathfrak{A}$ aller Matrizen überhaupt. Durch die Abbildung $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ rd jedem A ein $\bar{A}$ zugeordnet, d. h. $\mathfrak{A}$ auf eine gewisse (unbekannte) nnigfaltigkeit $\bar{\mathfrak{A}}$ von Matrizen abgebildet. Diese Zuordnung $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ ist n von wesentlich einfacherer Natur als die Abbildung $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ selbst.

Sie ist *erstens* linear homogen, d. h. sind A und B zwei beliebige trizen, $\bar{A}$, $\bar{B}$ ihre Bilder bei der Abbildung $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$, so gilt stets

$$\begin{cases} \overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B} \\ \overline{\lambda A} = \lambda \bar{A}, \end{cases}$$

λ eine beliebige Zahl bedeutet. *Zweitens* ist stets

$$\overline{AB - BA} = \bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}.$$

Man setze zum Beweise $M_1 = E + \delta A$, $M_2 = E + \eta B$ und bilde

$$M_{12} = M_2^{-1} M_1^{-1} M_2 M_1 = E + \varepsilon(AB - BA) \qquad (\varepsilon = \delta\eta).$$

$'_{12}$ ist nun einerseits $= E + \varepsilon(\overline{AB - BA})$, andererseits aber nach der nktionaleigenschaft (1)

$$= (M_2^{-1})' \cdot (M_1^{-1})' \cdot M_2' \cdot M_1' = E + \varepsilon(\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}),$$

raus sich (3) ergibt.

Das Fundamentalproblem ist also zurückgeführt auf ein ähnlich lau- ndes aber lineares Problem für die Abbildung $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$, mit dessen Lö- ng wir uns zu beschäftigen haben.

Wir können sofort aus den Gesetzen I, II und III drei Gesetze $\bar{\text{I}}$, $\bar{\text{II}}$ d $\bar{\text{III}}$ für die Abbildung $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ ableiten. Diese Gesetze lauten, wenn r unter $\bar{a}_{ik}$ die Elemente des Bildes $\bar{A}$ einer beliebigen Matrix A (mit n Elementen a_{ik}) verstehen, folgendermaßen:

$\bar{\text{I}}$. $\bar{A} = U_0 A U_0^{-1}$ (U_0 beliebig, aber $|U_0| \neq 0$),

$\bar{\text{II}}$. $\bar{a}_{ik} = -a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$,

$\bar{\text{III}}$. $\bar{a}_{ik} = a_{ik} + \alpha \cdot a$, wobei $a = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die Spur von A, α die im Ge- ze III auftretende willkürliche Konstante bedeutet.

§ 3.

Die Killingsche Gleichung.

Folgende Überlegungen führen zur Ermittelung aller für die Abbildung $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ möglichen Gesetze.

Sei A eine beliebige Matrix. Wir fragen:

Gibt es eine Matrix $X \neq 0$[4]) von der Art, daß $[AX]$ proportional zu X ist, daß also die Gleichung

$$[AX] = \lambda X \tag{4}$$

besteht, wo λ den unbekannten Proportionalitätsfaktor bedeutet. Eine solche Proportionalität würde offenbar unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems bestehen.

Die Übereinstimmung der beiden Matrizen $[AX]$ und λX drückt sich in n^2 linearen homogenen Gleichungen für die n^2 unbekannten Elemente x_{ik} von X aus. Eine nicht triviale Lösung existiert nur dann, wenn die Determinante des Systems verschwindet. Diese Bedingung liefert eine Gleichung des Grades n^2 für λ, die wir mit

$$K(A) = 0$$

bezeichnen und die *Killingsche Gleichung* für die Matrix A nennen wollen[5]). Ihre (gegenüber einer Koordinatentransformation invarianten) Wurzeln mögen die Killingschen Wurzeln der betreffenden Matrix heißen. Neben diesen werden wir noch die charakteristischen Wurzeln einer Matrix A zu betrachten haben, d. h. die Wurzeln der Gleichung n-ten Grades in μ, die man erhält, indem man die Determinante der Matrix $A - \mu E$ gleich 0 setzt:

$$|A - \mu E| = 0,$$

wofür wir auch

$$S(A) = 0$$

schreiben wollen.

Die Killingschen Wurzeln werden uns den Zusammenhang liefern, welcher bei einer Abbildung $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ zwischen den charakteristischen Wurzeln zweier einander zugeordneten Matrizen besteht.

Zunächst zeigen wir folgendes: Die n^2 Killingschen Wurzeln jeder Matrix A sind die *Differenzen* ihrer n charakteristischen Wurzeln. Bezeichnen wir mit DS das (auf rationalem Wege aus S zu berechnende) Polynom, dessen Wurzeln die Differenzen der Wurzeln von S sind, so lautet unsere Behauptung:

$$K = DS.$$

---

[4]) Unter 0 ist hier die Matrix mit den Elementen Null zu verstehen.

[5]) Sie tritt in einem anderen Problem bei Killing (Mathematische Annalen 33 (1888) S. 259) auf.

Sei A zunächst eine Hauptmatrix (d. h. eine solche, bei welcher alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale verschwinden). Ihre Diagonalelemente, die wir mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnen wollen, sollen alle voneinander verschieden sein. Die a_i sind zugleich die charakteristischen Wurzeln von A. Die n^2 Gleichungen für die Unbekannten x_{ik} lauten im vorliegenden Falle einfach

$$(a_i - a_k)\, x_{ik} = \lambda x_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n); \tag{5}$$

die zugehörige Gleichung $K = 0$ heißt

$$\prod_{i,k=1}^{n} [\lambda - (a_i - a_k)] = 0,$$

sie hat somit in der Tat zu Wurzeln die n^2 Zahlen

$$\lambda = a_i - a_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Wegen der Invarianz der Gleichungen $K = 0$ und $S = 0$ gegenüber einer Koordinatentransformation folgt daraus ohne weiteres die Gültigkeit der Beziehung $K = DS$ für jede Matrix mit n verschiedenen charakteristischen Wurzeln.

Um uns nun von dieser Voraussetzung zu befreien, bemerken wir, daß die Koeffizienten von $S(Z), K(Z), DS(Z)$ rationale Funktionen der Elemente der (frei veränderlichen) Matrix Z sind. Dabei stimmen, wie eben bewiesen worden ist, die Koeffizienten von K und DS immer dann überein, wenn die Elemente der entsprechenden Matrix Z gewisse Ungleichungen erfüllen; nämlich die, welche besagen, daß die Diskriminante $\Delta(S)$ von S von Null verschieden ist. Nach bekannten algebraischen Prinzipien muß dann die Gleichung $K = DS$ überhaupt für jede Matrix bestehen, w. z. b. w.

Wir gehen jetzt dazu über die Beziehungen festzustellen, welche bei einer Zuordnung $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ zwischen den Killingschen und also auch zwischen den charakteristischen Wurzeln einer einzigen passend gewählten Matrix und ihres Bildes bestehen.

Unter A verstehen wir fortan eine *festgewählte* Hauptmatrix, deren Diagonalelemente wir wieder mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnen wollen. Die a_i sollen alle voneinander verschieden sein; außerdem müssen diese Konstanten noch gewisse Bedingungen, deren Aufzählung wir an eine spätere Stelle verschieben, erfüllen. Sei nun $\lambda = a_i - a_k$ $(i \neq k)$ eine nicht verschwindende Killingsche Wurzel von A. Eine zugehörige „Lösung" von (4) ist, wie ein Blick auf (5) lehrt, eine Matrix X_{ik} in welcher bloß das (ik)-te Element $(i \neq k)$ von 0 verschieden und z. B. $= 1$ ist.

Zwischen den Bildern $\bar{A}$, $\bar{X}_{ik}$ von A und X_{ik} besteht nach (2) und (3) ebenfalls die Gleichung

$$[\bar{A}\,\bar{X}_{ik}] = \lambda \bar{X}_{ik} \tag{6}$$

mit *demselben* λ. Es ist aber durchaus mit den Forderungen, die durch (2) und (3) an die (unbekannte) Abbildung $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ gestellt sind, verträglich, daß das Bild eines X_{ik} die Matrix 0 ist. Deshalb müssen wir eine Fallunterscheidung einführen.

Wir sprechen vom *allgemeinen Fall*, wenn jedem X_{ik} als Bild eine von 0 verschiedene Matrix entspricht. *Der Ausnahmefall* liegt vor, wenn mindestens ein X_{ik} in 0 übergeht. Die Abbildungen, die diesem Fall entsprechen, werden sich als ausgeartet herausstellen.

§ 4.

Der allgemeine Fall.

Wir stellen zunächst die Bedingungen zusammen, die wir den Elementen a_i der festgewählten Matrix A auferlegen wollen:

1. Die a_i sollen alle voneinander verschieden sein.

2. Die für $i \neq k$ nicht verschwindenden Differenzen $a_i - a_k = d_{ik}$ sollen ebenfalls alle voneinander verschieden sein.

3. Die Summe zweier d: $d_{ik} + d_{rs}$ tritt niemals wieder unter den d auf, außer wenn $i = s$ oder $k = r$ ist.

4. Die Spur $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ von A soll von 0 verschieden sein.

Alle diese Bedingungen sind erfüllt, wenn wir z. B. $a_i = 10^i$ setzen.

Liegt nun (bei dieser Wahl von A) der allgemeine Fall vor, so sieht man aus (4) und (6), daß die $n(n-1)$ nicht verschwindenden und (nach 2) voneinander verschiedenen Wurzeln $\lambda = d_{ik} = a_i - a_k$ $(i \neq k)$ von $K(A)$ zugleich Killingsche Wurzeln der Matrix $\bar{A}$ sind. Wegen der für jede Matrix gültigen Relation $K = DS$ kann aber $\bar{A}$ überhaupt höchstens $n(n-1)$ nichtverschwindende ungleiche Killingsche Wurzeln besitzen. Somit sind die n charakteristischen Wurzeln von $\bar{A}$ sicher alle voneinander verschieden; wir wollen sie mit $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ bezeichnen.

Es handelt sich jetzt offenbar darum, alle Systeme von n Zahlen zu bestimmen, die dieselben n^2 Differenzen d_{ik} besitzen, wie die Zahlen a_i selbst. Wir werden das *Resultat* erhalten: Ein solches Zahlensystem besteht entweder aus den Zahlen

$$a_1 + c,\ a_2 + c,\ \ldots,\ a_n + c$$

oder aber den Zahlen

$$-a_1 + c,\ -a_2 + c,\ \ldots,\ -a_n + c,$$

wobei c eine willkürliche Konstante bedeutet.

Beweis. Wir denken uns die a_i aufsteigend angeordnet:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n,$$

o daß $d_{ik} > 0$ für $i > k$ ist. Wir bezeichnen zwei Differenzen als zu-ammenhängend, wenn ihre Summe ebenfalls unter den d vorkommt.

Unter den positiven d_{ik} sind die Differenzen

$$d_{21}, d_{32}, \ldots, d_{n,n-1} \tag{7}$$

weier ihrer Größe nach aufeinanderfolgender a durch die Eigenschaft iedererkennbar, daß die kleinste mit einem solchen $d = d_{i+1,i}$ zusammen-ängende negative Differenz gleich $-d$ ist. (Während z. B. mit $d = d_{31}$ ie negativen Differenzen d_{12} und d_{23} zusammenhängen, die absolut ge-ommen kleiner als d sind.) Jedes d aus (7) ist mit genau zwei weiteren Differenzen in dieser Reihe (nämlich mit seinen beiden Nachbarn) zu-ammenhängend. Eine Ausnahme bilden d_{21} und $d_{n,n-1}$, die je nur einen Nachbarn besitzen.

Sind die gesuchten $\bar{a}_i$ ebenfalls aufsteigend geordnet, so muß die ent-prechende Reihe

$$\bar{d}_{21}, \bar{d}_{32}, \ldots, \bar{d}_{n,n-1}$$

lemnach entweder mit der Reihe (7) oder mit der rückwärts durchlaufenen Reihe (7) identisch sein. Dementsprechend erhält man für die $\bar{a}_i$ entweder die Werte

$$a_1 + c, \quad a_2 + c, \ldots, a_n + c$$

oder aber

$$-a_n + c, -a_{n-1} + c, \ldots, -a_1 + c,$$

womit wir, da die Reihenfolge der $\bar{a}_i$ willkürlich ist, die Behauptung bewiesen und die charakteristischen Wurzeln von $\bar{A}$ ermittelt haben.

Diesem Ergebnis ist zu entnehmen, daß wir durch Anwendung einer passenden Kombination der Gesetze $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{II}}$ und $\overline{\mathrm{III}}$ A in $\bar{A}$ überführen können. (Bei der Anwendung des Gesetzes $\overline{\mathrm{III}}$ wird die Voraussetzung über das Nichtverschwinden der Spur von A ausgenutzt.) Wir dürfen uns also hier von vornherein auf die Betrachtung von Abbildungen $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ be-schränken, welche die Matrix A festlassen.

Es ist jedoch nicht zu erwarten, daß eine solche Abbildung notwendig die identische sein muß. In der Tat ändert sich A z. B. durch Transfor-mation vermittelst einer Hauptmatrix A mit den willkürlichen (von 0 ver-schiedenen) Diagonalelementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nicht; eine beliebige Matrix X mit den Elementen x_{ik} geht aber dabei in eine Matrix $\bar{X}$ mit den Elementen

$$\bar{x}_{ik} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k} x_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

über.

Wir wollen nun zeigen, daß bei jeder Abbildung $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$, bei welcher zu (2) und (3) noch das Bestehen der Gleichung

$$\bar{A} = A$$

hinzutritt, die Elemente des Bildes $\bar{X}$ einer willkürlichen Matrix X gerade durch die Gleichungen (8) mit denjenigen des Originals zusammenhängen.

Wir werden dann, zusammenfassend, folgendes Resultat aussprechen können: *Im vorliegenden allgemeinen Fall ist jedes Gesetz für eine beliebige Abbildung* $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ *eine Kombination der Elementargesetze* $\bar{\text{I}}$, $\bar{\text{III}}$ *oder* $\bar{\text{I}}$, $\bar{\bar{\text{II}}}$, $\bar{\bar{\text{III}}}$.

Zum Beweise der Gleichungen (8) können wir, wegen des Bestehens der Relation $\bar{A} = A$, das Verfahren der „Trennung in Länder" benutzen[6]). Es ergibt sich dann, daß sowohl die Hauptdiagonale, als jedes einzelne seitliche Feld $\{i > k\}$, $\{i < k\}$ einer beliebigen Matrix X je ein „Land" für sich bildet. Da die Elemente von $\bar{X}$ linear von denjenigen von X abhängen, folgt daraus sofort

$$\bar{x}_{ik} = \alpha_{ik} x_{ik} \qquad (i \neq k). \tag{9}$$

Die $n(n-1)$ Konstanten α_{ik} sind alle von 0 verschieden. Sonst würde, wie leicht zu sehen ist, einer Matrix X_{ik} (S. 6) die Matrix 0 entsprechen, was ja im vorliegenden allgemeinen Fall nicht vorkommen soll.

Um ferner die $\bar{x}_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ als (lineare) Funktionen der Elemente der Diagonale von X zu ermitteln, bilden wir die Matrix $W = [XV]$, wo V bloß *ein* nichtverschwindendes Element v_{ik} $(i \neq k)$, z. B. $v_{ik} = 1$, besitzt. Zwischen den entsprechenden Bildmatrizen besteht dann ebenfalls die Relation $\bar{W} = [\bar{X}\bar{V}]$ und die Elemente $\bar{w}_{ik}$ und w_{ik} von $\bar{W}$ und W sind durch die Gleichung

$$\bar{w}_{ik} = \alpha_{ik} w_{ik}$$

verbunden, d. h. es ist

$$(\bar{x}_{ii} - \bar{x}_{kk})\bar{v}_{ik} = \alpha_{ik}(x_{ii} - x_{kk})v_{ik}.$$

Da aber auch für das Element v_{ik} von V die Gleichung $\bar{v}_{ik} = \alpha_{ik} v_{ik}$ besteht, folgt daraus

$$\bar{x}_{ii} - \bar{x}_{kk} = x_{ii} - x_{kk}. \tag{10}$$

$\bar{x}_{ii} - x_{ii}$ ist eine Linearform der Diagonalelemente von X:

$$\bar{x}_{ik} - x_{ii} = l(X) = \sum_{r=1}^{n} l_r x_{rr}. \tag{11}$$

[6]) Vgl. H. Weyl, Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 125.

(10) besagt, daß $l(X)$ vom Index i unabhängig ist, Wir können
m, indem wir (für jedes i) $\alpha_{ii}=1$ setzen (9) und (11) in die folgende
r alle (i, k) gültige Gleichung

$$\bar{x}_{ik}=\alpha_{ik}x_{ik}+\delta_{ik}l(X) \qquad \left(\delta_{ik}=\begin{cases}1 \text{ für } i=k\\ 0 \text{ für } i\neq k\end{cases}\right) \tag{12}$$

sammenfassen $(i, k=1, 2, \ldots, n)$.

Um die α_{ik} und die l_i näher zu bestimmen, betrachten wir neben X
ne zweite willkürliche Matrix Y. Dann haben wir außer (12) noch die
leichungen

$$\bar{y}_{ik}=\alpha_{ik}y_{ik}+\delta_{ik}l(Y) \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

elche zwischen den Elementen von Y und $\bar{Y}$ bestehen.

Setzen wir $Z=[XY]$, so ist jedes Element $\bar{z}_{ik}$ von $\bar{Z}$ einerseits
eich $\alpha_{ik}z_{ik}+\delta_{ik}l(Z)$, andererseits aber gleich

$$\sum_{r=1}^{n}(\bar{x}_{ir}\bar{y}_{rk}-\bar{y}_{ir}\bar{x}_{rk})=\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ir}\alpha_{rk}(x_{ir}y_{rk}-y_{ir}x_{rk}).$$

s besteht also, identisch in den x und y, die Gleichung

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ir}\alpha_{rk}(x_{ir}y_{rk}-y_{ir}x_{rk})=\alpha_{ik}\sum_{r=1}^{n}(x_{ir}y_{rk}-y_{ir}x_{rk})+\delta_{ik}l([XY]). \tag{13}$$

Für $i\neq k$ ergeben sich daraus unmittelbar die Relationen

$$\alpha_{ir}\alpha_{rk}=\alpha_{ik} \qquad (i\neq k;\ r=1, 2, \ldots, n).$$

Für $i=k$ lautet die Gleichung (13)

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ir}\alpha_{ri}(x_{ir}y_{ri}-y_{ir}x_{ri}), \tag{14}$$

$$=\alpha_{ii}\sum_{r=1}^{n}(x_{ir}y_{ri}-y_{ir}x_{ri})+\sum_{r=1}^{n}\Big[l_r\sum_{s=1}^{n}(x_{rs}y_{sr}-y_{rs}x_{sr})\Big].$$

Setzen wir für einen Augenblick

$$x_{rs}y_{sr}-y_{rs}x_{sr}=u_{rs},$$

können wir für (14) schreiben

$$\sum_{r,s=1}^{n}\lambda_{rs}u_{rs}=0,$$

obei

$$\lambda_{rs}=l_r+\delta_{ir}(1-\alpha_{is}\alpha_{si})$$

t. Die Gleichung

$$\sum_{r,s=1}^{n}(\lambda_{rs}-\lambda_{sr})x_{rs}y_{sr}=0.$$

(welche mit $\sum_{r,s=1}^{n} \lambda_{rs} u_{rs} = 0$ gleichbedeutend ist) besteht identisch in den
und y; daraus folgt $\lambda_{rs} = \lambda_{sr}$, d. h.

$$l_r + \delta_{ir}(1 - \alpha_{is}\alpha_{si}) = l_s + \delta_{is}(1 - \alpha_{ir}\alpha_{ri}). \tag{15}$$

Setze ich $i = r + s$, so reduziert sich (15) auf

$$l_s = l_r + (1 - \alpha_{rs}\alpha_{sr}),$$

eine Gleichung, welche zeigt, daß die Differenz $l_r - l_s$ sich nicht ander
wenn r und s vertauscht werden. Daraus ergeben sich für alle r und
die Beziehungen $l_r = l_s$ und $\alpha_{sr} = \alpha_{rs}\alpha_{sr}$.

Es gilt also folgendes:

Die l_i sind alle einander gleich. Ihr gemeinsamer Wert ist abe
Null, wie man sofort sieht, wenn man für die willkürliche Matrix X di
Hauptmatrix A setzt. $l(X)$ ist somit identisch Null. Es ist stets

$$\bar{x}_{ik} = \alpha_{ik} x_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

wobei zwischen den α_{ik} die Beziehungen

$$\alpha_{ir}\alpha_{rk} = \alpha_{ik} \qquad (i, k, r = 1, 2, \ldots, n$$

bestehen. Das bedeutet aber, daß man die n^2 Zahlen α_{ik} durch n neue
nicht verschwindende Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nach den Gleichungen

$$\alpha_{ik} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k}$$

ersetzen kann. Setzt man diese Werte von α_{ik} in (16) ein, so erhält
man die zu beweisenden Gleichungen (8).

§ 5.

Der Ausnahmefall.

Wir wollen nun die Gesetze ermitteln, nach welchen eine Abbildung
$\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ entstehen kann, wenn wir voraussetzen, daß dabei mindestens eine
Matrix X_{ik} $(i \neq k)$ in 0 übergeht.

Die Matrizen, denen als Bild die Matrix 0 entspricht, bilden eine
lineare Schar $\mathfrak{S}$, welcher offenbar folgende Eigenschaft zukommt: Ist X_ϱ
irgendeine Matrix aus $\mathfrak{S}$ und Y eine ganz beliebige Matrix, so gehört
$[X_\varrho Y]$ der Schar $\mathfrak{S}$ an.

Nach Voraussetzung enthält $\mathfrak{S}$ eine Matrix X_{ik} $(i \neq k)$. Dann ge-
hören aber auch alle Matrizen $X_{iq} = [X_{ik} X_{kq}]$ (q beliebig, aber $\neq i$)
und mit diesen alle $X_{pq} = [X_{ik} X_{iq}]$ (p und q beliebig, aber $p \neq q$ und
$q \neq i$) der Schar $\mathfrak{S}$ an. Um zu den fehlenden Matrizen X_{pi} (p beliebig,
aber $\neq i$) zu gelangen, bilden wir $[X_{ik} X_{ki}]$ und erhalten eine, ebenfalls

ı $\mathfrak{S}$ gehörende Hauptmatrix D_{ik}, welche nur an den Stellen (i, i) und $k, k)$ der Diagonale die nichtverschwindenden Elemente $+1$ bzw. -1 esitzt. Da nun $X_{pi} = [X_{pi} D_{ik}]$ ist, sehen wir schließlich, daß mit einem $_{ik}$ in $\mathfrak{S}$ alle X_{pq} $(p \neq q)$ und mit diesen alle D_{pq} vorkommen. Daraus lgt aber: $\mathfrak{S}$ enthält jede Matrix von der Spur 0. Eine solche läßt sich ämlich linear aus den X_{pq} und D_{pq} zusammensetzen.

Sei X eine beliebige Matrix aus $\mathfrak{A}$. Die Elemente $\bar{x}_{ik}$ ihres Bildes $\bar{X}$ nd lineare Funktionen der Elemente x_{rs} von X:

$$\bar{x}_{ik} = l_{ik}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

ie l_{ik} verschwinden im vorliegenden Falle jedesmal zusammen mit der nearen Funktion

$$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{nn} = x.$$

Also sind die l_{ik} konstante Multipla von x:

$$\bar{x}_{ik} = \gamma_{ik} x.$$

ls Bild von X haben wir somit die Matrix

$$\bar{X} = x\,\Gamma,$$

o Γ eine Matrix mit (beliebigen aber) konstanten Elementen γ_{ik} ist. ir haben ein neues Gesetz — $\overline{\text{IV}}$ — vor uns; eine Abbildung $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$- e nach einem solchen Gesetze entsteht, erfüllt in der Tat die Bedin, ngen (2) und (3).

§ 6.

Integration.

Wir kennen jetzt alle Elementargesetze, nach welchen eine Abbildung $\to \bar{\mathfrak{A}}$ entstehen kann, und wollen hieraus diejenigen für die Abbildung $\to \mathfrak{M}'$ ermitteln.

Sei eine solche Zuordnung $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ gegeben. Wir werden das Bild M' ner beliebigen Matrix M aus $\mathfrak{M}$ durch eine Integration erhalten, indem ir E mit M durch eine stetige Kurve, die ganz innerhalb der Mannigltigkeit von Matrizen mit nichtverschwindender Determinante verläuft, rbinden. Wegen der Voraussetzung $|M| > 0$ existiert eine solche Verndung: der Weg braucht nicht aus $\mathfrak{M}$ herauszutreten.

Die Kenntnis des Gesetzes für die mit $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ verknüpften Abldung $\mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ erlaubt uns mit dem Bilde M_1' irgendeiner Matrix M_1 s $\mathfrak{M}$, das Bild jeder zu ihr benachbarten zu ermitteln. Eine solche atrix läßt sich ja, wegen $|M_1| \neq 0$, in der Form $M_1(E + \varepsilon X)$ (bei ssender Wahl von X) schreiben. — Nun ist E' stets $= E$. Wir können so durch einen Integrationsprozeß längs des Weges, welcher E mit M rbindet, das Bild M' von M ermitteln.

Es ist demnach klar, daß jeder Abbildung $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ rückwärts nur ein Abbildung $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ entsprechen kann (Unitätssatz). Denn $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ ist offenbar nur dann die identische Abbildung, wenn auch $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ jede Matrix festläßt.

I, II und III sind somit die einzigen Gesetze, denen $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{II}}$ und $\overline{\mathrm{III}}$ entsprechen können. Um das Gesetz IV (zu welchem $\overline{\mathrm{IV}}$ gehört) zu ermitteln, denken wir uns die willkürliche Matrix M aus $\mathfrak{M}$ in der Form

$$M = \lim_{n=\infty} \left(E + \frac{1}{n} X\right)^n = \sum \frac{X^n}{n!} \tag{17}$$

dargestellt (was bei passender Wahl von X möglich ist). Dann liefern eine Integration die ihr zugeordnete Matrix

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^n (\lg |M|)^n}{n!}, \tag{18}$$

wobei Γ die im Gesetz $\overline{\mathrm{IV}}$ auftretende Matrix, x die Spur von X bedeutet.

Das Abbildungsgesetz IV ist durch die Gleichungen (17) und (18) erklärt. Man kann aber leicht einsehen, daß jeder Zuordnung $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ nach dem Gesetze $\overline{\mathrm{IV}}$ eine Abbildung $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ entspricht, bei welcher die Elemente von M' elementare Funktionen (Potenzen und Logarithmen der Determinante von M sind. Die explizite Darstellung einer solchen Abbildung (die nach dem Unitätssatze von der durch (17) und (18) erklärten nicht verschieden sein kann), hängt aber von Γ, nämlich von der Normalgestalt, welche Γ durch eine Koordinatentransformation annehmen kann, ab[7]). Wir bekommen zu jeder solchen Normalgestalt von Γ eine besondere Form von M'. Ist z. B. Γ (in seiner Normalgestalt) eine Hauptmatrix mit den (nicht notwendig voneinander verschiedenen) charakteristischen Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$, so ist M' die im § 1 bereits angegebene Hauptmatrix mit den Diagonalelementen $|M|^{r_1}, |M|^{r_2}, \ldots, |M|^{r_n}$.

Ist aber die Normalgestalt von Γ etwa die folgende

$$\Gamma = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & r & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & s & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & s & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

[7]) Die Typen der Normalgestalten von Matrizen sind aus der Elementarteilertheorie vollständig bekannt.

ei $r, s \ldots$ (mehrfache) charakteristische Wurzeln von Γ bedeuten, so man als M' die Matrix

$$= \begin{pmatrix} |M|^r & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ |M|^r l_1(|M|) & |M|^r & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ |M|^r l_2(|M|) & |M|^r l_1(|M|) & |M|^r & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & |M|^s & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \ldots & 0 & |M|^s l_1(|M|) & |M|^s & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

bei bedeuten $l_1(|M|)$, $l_2(|M|), \ldots$ die in der Theorie der linearen ferentialgleichungen auftretenden Funktionen

$$\lg(|M|), \quad \frac{\lg(|M|)\,[\lg(|M|)-1]}{1 \cdot 2}, \ldots .$$

Man kann stets leicht das Bildungsgesetz von M' übersehen. Die heitliche, alle Fälle umfassende Darstellung von M' ist durch (18) eben. Wir können uns aber jetzt leicht überzeugen, daß man in einer bildung nach dem Gesetze IV mit einem für die Tensorrechnung un- uchbaren Ausartungsfall zu tun hat.

(Eingegangen am 14. Februar 1922.)

Über lineare homogene Punktmengen.

Von

B. P. Haalmeijer in Amsterdam.

Herr Hausdorff nennt eine von Null verschiedene geordnete Men homogen, wenn sie mit allen ihren Strecken ähnlich ist[1]). Einigermaß analog hierzu hat der Verfasser eine lineare Punktmenge π homogen Intervall AB[2]) genannt, wenn jedes Teilintervall von AB eine Teilmen aus π herausschneidet, welche eineindeutig und gleichmäßig stetig auf d innerhalb des ganzen Intervalls AB gelegenen Teil von π abbildbar ist Diese Homogenität werden wir bezeichnen mit *Homogenität im enger Sinn*. Ist die Menge π innerhalb AB von Null verschieden und i engeren Sinn homogen, dann ist sie offenbar dicht in diesem Interv und die vorgenannten Abbildungen bestimmen topologische Abbildung von ganzen Segmenten aufeinander.

Mit *Homogenität im weiteren Sinn* werden wir eine Eigensch bezeichnen, die durch die folgende Definition von Herrn Brouwer[4]) b stimmt wird: Eine lineare Punktmenge ist homogen im Intervall A wenn für jedes innerhalb AB gelegene Punktpaar $P_1 P_2$ von π eine top logische Transformation des Intervalls AB in sich selbst besteht, welc

---

[1]) Grundz. der Mengenlehre, S. 173.

[2]) „Intervall" steht für „offenes Intervall".

[3]) Proc. Acad. Amst. XXII (1919), S. 681. Der Zusatz „gleichmäßig" bei stet bedeutet folgendes: Bestehe zwischen den Punkten zweier Mengen α und β eine ei eindeutige, stetige Verwandtschaft. Wenn stets mit allen Punktreihen der ein Menge (α oder β), die zu einem einzigen, nicht zur Menge gehörenden Punkte ko vergieren, Punktreihen der anderen Menge korrespondieren, die ebenfalls zu eine einzigen Punkte konvergieren, dann nennt man die Stetigkeit der Korresponde gleichmäßig Z. B. die Menge der Rationalzahlen zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ und zwisch $\frac{3}{4}$ und 1 kann eineindeutig und stetig abgebildet werden auf die Menge der Ration zahlen zwischen 0 und 1, aber diese Stetigkeit ist niemals gleichmäßig.

[4]) Proc. Acad. Amst. XX (1917), S. 1194.

in P_2 überführt und den innerhalb AB gelegenen Teil von π in sich st.

Eine im weiteren Sinne homogene Punktmenge ist nicht notwendig engeren Sinne homogen. Ein Beispiel bietet eine isolierte, lineare ktmenge mit dem Ordnungstypus $\omega^* + \omega$. Jedoch gilt wohl das gekehrte, daß eine im engeren Sinne homogene Menge auch im weiteren ne homogen ist.

Beweis. Verfasser hat früher gezeigt[3]), daß man bei den Transnationen, die durch die Homogenität im engeren Sinne postuliert den, sich auf solche beschränken kann, welche die Richtung invariant en. Sei nun π im engeren Sinne homogen in AB und P_1, P_2 je ein kt von π, wobei wir die Ordnung von links AP_1P_2B annehmen. ohl der Teil von π innerhalb AP_1 wie auch der Teil innerhalb AP_2 n mit invarianter Richtung auf den Teil von π innerhalb AB abgeet werden und also auch die beiden erstgenannten Teile aufeinander. gleicher Weise der Teil von π innerhalb P_1B auf den innerhalb P_2B. π in AB dicht ist, ist hiermit konstruiert eine topologische Transnation des Segmentes AB in sich selbst, bei welcher P_1 in P_2 über- und der innerhalb AB gelegene Teil von π in sich selbst. Die ge π ist also auch im weiteren Sinne homogen in AB.

Herr Brouwer hat das Problem gestellt, alle Ordnungstypen von weiteren Sinn homogenen linearen Punktmengen aufzufinden. Die ung dieses Problems, die gewiß zu unserer Einsicht in die Struktur linearen Kontinuums beitragen würde, ist, soweit mir bekannt, noch t vollständig gegeben. Vorläufig ist es wahrscheinlich, daß eine im teren Sinn homogene Menge stets innere oder äußere Grenzmenge ist[5]). te es gelingen, dies zu beweisen, dann wäre das Problem der mögen Ordnungstypen wohl bald erledigt.

Hauptzweck des Folgenden ist die Aufstellung der notwendigen und reichenden Bedingungen, unter welchen eine im weiteren Sinn homogene ktmenge auch im engeren Sinn homogen ist (Satz 2), ein Resultat, ches wahrscheinlich für die weitere Untersuchung von Belang sein wird.

Wenn nicht das Gegenteil erwähnt wird, verstehen wir unter *homogen* nachfolgenden *homogen im weiteren Sinn.* Ferner lassen wir die ialen Fälle außer Betracht, daß eine homogene Menge aus 1 oder 0 kten besteht.

Satz 1. *Sei π homogen in AB und $\varkappa$ die Komplementärmenge in ug auf das offene Segment AB. Wenn auch $\varkappa$ homogen in AB ist*[6]),

[5]) Wir beschränken uns stillschweigend immer auf den Teil der Menge, der rhalb des Intervalls AB gelegen ist, für welches die Homogenität postuliert ist.

[6]) Diese Bedingung ist nicht notwendig.

dann kann man sich bei den durch die Homogenität von π postulier Transformationen auf solche beschränken, welche die Richtung invari lassen.

Beweis. Sei $\varkappa$ nicht dicht in AB, dann enthält π ein ganzes Te segment von AB und die Homogenität von π ergibt, daß diese Me aus den inneren Punkten einer Intervallmenge I besteht. Da $\varkappa$ von N verschieden ist, gibt es ein Intervall von I mit einem innerhalb AB legenen Endpunkt. Dieser Endpunkt gehört zu $\varkappa$, und die Homogeni von $\varkappa$ ergibt dann, daß diese Menge kein ganzes Segment enthalten ka m. a. W.: $\varkappa$ ist punkthaft und I ist dicht in AB.

Bei den Transformationen von π in sich selbst kann ein Interv von π nur in ein Intervall von π übergehen und aus der Homogeni von π folgt nun, daß diese Menge unendlich viele Intervalle enthält, es kein erstes oder letztes Intervall geben kann (bei A bzw. B). setzt nämlich den Fall, es sei ein erstes (letztes) Intervall möglich; b trachtet man dann die Transformation, die einen Punkt dieses Interva überführt in einen Punkt eines Intervalls, das nicht erstes (letztes) i so ergibt dies sofort einen Widerspruch.

Gehören zu I zwei Intervalle mit einem gemeinschaftlichen Endpun dann ist dieser ein Punkt von $\varkappa$, der in dieser Menge einen unmittelb vorhergehenden und einen unmittelbar nachfolgenden Punkt hat. Aus Homogenität von $\varkappa$ folgt nun dasselbe für jeden anderen Punkt von Offenbar besteht π in diesem Falle aus einer Menge aneinander schließen Intervalle vom Ordnungstypus $\omega^* + \omega$ und $\varkappa$ aus deren Endpunkten. ist evident, daß man sich hier für die Homogenität sowohl von π von $\varkappa$ auf Transformationen beschränken kann, welche die Richtung variant lassen[7]).

Enthält I keine zwei Intervalle mit einem gemeinschaftlichen E punkt, dann bildet sie eine in AB dichte Intervallmenge vom Ordnun typus η (d. h. dem Ordnungstypus der Rationalzahlen), also ist $\varkappa$ nirge dicht perfekt, welche Mengenart nicht homogen ist[8]).

---

[7]) Mit Transformation (Abbildung) meinen wir stets eine solche, die eine to logische Transformation (Abbildung) von ganzen Intervallen in (auf) einander bestimmt, wobei Punkte von π stets korrespondieren mit Punkten von π, Pun von $\varkappa$ also mit Punkten von $\varkappa$.

[8]) In einer linearen nirgends dichten perfekten Punktmenge gibt es Punk welche einen unmittelbar vorhergehenden oder einen unmittelbar folgenden Pu besitzen, und auch solche, welche weder das eine noch das andere haben. Nun eine eineindeutige stetige Transformation der Menge in sich selbst, bei der ein Pu der ersten Art in einen Punkt der zweiten Art übergeht, offenbar unmöglich, die trachtete Menge also nicht homogen.

Der Fall, daß π in AB nicht dicht liegt, ist analog zu behandeln: r vertauschen in der Beweisführung einfach π mit $\varkappa$.

Im folgenden können wir uns also auf den Fall beschränken, daß vohl π als $\varkappa$ in AB dicht sind.

Wir werden von α- bzw. β-Transformationen sprechen, je nachdem Richtung invariant bleibt oder nicht.

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann ist ein gewisser nkt P von π nicht in jeden anderen Punkt von π durch eine α-Transfor- tion überführbar. Dies bringt mit sich, daß es keine β-Transformation t, welche einen Punkt von π unverändert läßt, denn für jeden Punkt n π würde es dann eine solche Transformation geben, und wenn nun in P_1 übergeführt würde durch eine β-Transformation, würde diese, mbiniert mit der β-Transformation, die P_1 unverändert läßt, eine Transformation ergeben, welche P nach P_1 bringen würde.

Sei nun π_1 diejenige Teilmenge von π, die aus den Punkten besteht, welche P mittels α-Transformationen überführbar ist, und π_2 die Teil- nge der Punkte, für welche wir β-Transformationen brauchen. Offenbar jede Transformation, die einen Punkt von π_1 in einen Punkt von π_1 erführt, eine α-Transformation, und das gleiche gilt für jedes Punkt- ar von π_2. Bei diesen α-Transformationen wird π_1 in sich selbst über- führt und π_2 ebenfalls. Führt man jedoch einen Punkt von π_1 in einen nkt von π_2 über (oder umgekehrt), so ist dafür eine β-Transformation twendig, die offenbar π_1 und π_2 vertauscht. Offenbar ist π_1 wie π_2 mogen und $\pi_1 + \pi_2 = \pi$. Jede β-Transformation läßt einen Punkt des tervalls AB unverändert. Ein solcher Punkt kann aber nie zu π ge- ren, gehört also stets zu $\varkappa$. Diese letztere Menge wird dann auf sich bst abgebildet mittels einer β-Transformation, welche einen ihrer Punkte variant läßt. Bei der Homogenität von $\varkappa$ können wir uns also auf Transformationen beschränken.

Sei K ein willkürlicher Punkt von $\varkappa$. Da π dicht in AB liegt, ist Grenzpunkt von π, und da $\pi = \pi_1 + \pi_2$, ist K Grenzpunkt von ndestens einer der Mengen π_1 und π_2, nehmen wir an von π_1. Es ist er $\varkappa$ dicht in AB, und die Homogenität von $\varkappa$ ergibt nun sofort, daß ch π_1 dicht in AB ist. Da schließlich π_1 auf π_2 abgebildet werden nn (mittels der β-Transformationen, deren Existenz wir annahmen), ist ch π_2 dicht in AB.

Das Intervall AB ist also zerlegt in drei in AB dichte homogene nktmengen π_1, π_2 und $\varkappa$. Bei allen Transformationen, die durch die mogenität derselben postuliert werden, können wir auf α-Transforma- nen uns beschränken, und bei jeder dieser Transformationen geht jede drei Mengen in sich selbst über.

Dem Reste des Beweises schicken wir eine Reihe von Hilfssätzen voraus:

Hilfssatz 1a. *Wenn eine, durch die Homogenität von π_1, π_2 oder postulierte α-Transformation einen Punkt in einen mehr nach rechts (links) gelegenen Punkt überführt, kann diese Abbildung, wenn nötig, immer so abgeändert werden, daß kein Punkt innerhalb des Intervalls AB nach links (rechts) geht.*

Beweis. Angenommen Q_1 geht in einen mehr nach rechts gelegenen Punkt Q_2 über. Von Q_2 nach rechts gehend findet man einen ersten Punkt R, der invariant bleibt (eventuell fällt R mit B zusammen), und von Q_1 nach links gehend findet man ebenso einen ersten Punkt S, der unverändert bleibt (eventuell fällt S auf A). Kombiniert man die vorliegende Transformation innerhalb des Intervalls SR mit der Identität für den Rest von AB, so ist die gewünschte Transformation hergestellt.

Der Kürze halber bezeichnen wir im folgenden als *Teilintervall von QR* ein Teilintervall, das keinen Endpunkt mit QR gemein hat, und mit *Endstück von QR* ein Teilintervall, das einen aber nicht zwei Endpunkte mit QR gemein hat.

Hilfssatz 2a. *Es gibt ein Teilintervall von AB mit zu $\varkappa$ gehörenden Endpunkten, das mit invarianter Richtung auf eines seiner Endstücke abgebildet werden kann, wobei mit Punkten von $\varkappa$ (inklusive der Endpunkte) immer Punkte derselben Menge korrespondieren.*

Beweis. Angenommen, der Satz sei unrichtig, dann wählen wir zwei willkürliche Punkte K_1 und K_2 von $\varkappa$. Auf Grund des Vorhergehenden ist $\varkappa$ durch eine β-Transformation auf sich selbst abbildbar, wobei der Punkt K_1 unverändert bleibt und π_1 und π_2 wechselweise ineinander übergehen. Kombiniert man diese mit der α-Transformation, welche K_1 nach K_2 bringt und bei der jede der Mengen π_1, π_2 und $\varkappa$ in sich selbst übergeht, dann resultiert eine β-Transformation, welche K_1 nach K_2 bringt, $\varkappa$ auf sich selbst abbildet und π_1 mit π_2 vertauscht. Weiter führt diese Transformation K_2 in K_1 über, da sonst der Teil von $\varkappa$ innerhalb eines geschlossenen Intervalls mit Umkehrung von Ordnungsverhältnissen abgebildet würde auf den Teil innerhalb eines Endstückes, und bei zweiter Anwendung dieser Korrespondenz würde man eine Abbildung mit invarianten Ordnungsrelationen auf ein Teilintervall und also auf ein Endstück erhalten (dieses letzte Resultat auf Grund des Hilfssatzes 1a). Diese β-Transformation, die K_1 mit K_2 vertauscht, führt π_1 und π_2 wechselseitig ineinander über, und der invariante Punkt von AB gehört also zu $\varkappa$. Diesen Punkt K_3 nennen wir die *topologische Mitte* des Segmentes K_1K_2. Die α-Transformation, die K_1 nach K_3 bringt, führt offenbar K_3 in K_2

r, denn sonst würde sich wieder der Fall ergeben, daß ein Segment Umkehrung der Richtung auf eines seiner Endstücke abgebildet den könnte, und wir sahen oben schon, daß dies einen Widerspruch ibt.

Jedes Segment, dessen Endpunkte zu $\varkappa$ gehören, hat also eine topo- ische Mitte, die ebenfalls zu $\varkappa$ gehört. Seien K_1, K_2 und K_2' verschiedene nkte von $\varkappa$, wobei K_2 links von K_2', dann liegt die topologische Mitte K_3 Segmentes $K_1 K_2$ links von der topologischen Mitte K_3' von $K_1 K_2'$. meinung dessen ergibt nämlich, daß z. B. das Segment $K_3' K_2'$ auf eines ner Teilintervalle abgebildet werden könnte (mit Hilfssatz 1a ist „Teil- ervall" wieder auf „Endstück" zurückzuführen). Läßt man nun mit em Punkt K von $\varkappa$ zwischen K_1 und K_2 der topologischen Mitte des gmentes $K_1 K$ korrespondieren, dann hat man den Teil von $\varkappa$ innerhalb K_2 auf den Teil innerhalb $K_1 K_3$ abgebildet, womit eine Kontradiktion eicht ist.

Es gibt also ein Teilintervall $K_1 K_2$ von AB, das auf eines seiner dstücke abgebildet werden kann. Sei dieses das *linke* Endstück $K_1 K_2'$. f Grund des Vorhergehenden korrespondieren bei dieser Abbildung nkte von $\varkappa$ immer mit Punkten derselben Menge; aber dasselbe gilt π_1 und π_2, denn die betrachtete Abbildung ist, soweit sie $\varkappa$ betrifft, ekt auf das ganze Intervall AB zu erweitern, und würde hierbei ein nkt von π_1 in einen Punkt von π_2 übergeführt, dann wäre eine ver- dende α-Transformation zwischen π_1 und π_2 gefunden, womit Satz 1 viesen wäre.

Hilfssatz 3a. *Jedes geschlossene Teilintervall von AB kann auf linkes Endstück abgebildet werden*[9]).

Beweis. Nach Hilfssatz 2a ist ein gewisses Teilintervall $K_1 K_2$ AB auf ein Endstück $K_1 K_2'$ abbildbar. Von K_2 nach links gehend, ft man einen ersten Punkt S, der unverändert bleibt (eventuell fällt uf K_1). Das Intervall SK_2 ist dann auf das Endstück SK_2' abgebildet, welcher Abbildung nur S unverändert bleibt, und übrigens jeder nkt von SK_2' seinem Bildpunkte von SK_2 vorhergeht (d. h. links davor egen ist).

Sei nun XY ein willkürliches Teilintervall von AB, wobei X links Y gedacht sei. Innerhalb des eben betrachteten Intervalls SK_2 hlen wir einen Punkt Y'. der zu derselben Menge ($\varkappa$, π_1 oder π_2) gehört e Y und wenden die, durch die Homogenität dieser Menge postulierte

[9]) Mit den Abbildungen in diesem Hilfssatz werden stets solche gemeint, die die htung invariant lassen, und Punkte von $\varkappa$ (resp. π_1 oder π_2) immer in Punkte der- ben Menge überführen.

(α-)Transformation an, welche Y' nach Y bringt. Kommt S hierbei recht von X zu liegen, dann ist, da SY' auf ein linkes Endstück abbildbar is dasselbe auch für XY der Fall. Kommt S aber links von X zu liegen dann muß erst noch S zwischen X und Y gebracht werden und die gelingt durch eine Transformation, die postuliert ist durch die Homogenität der Menge, zu welcher S gehört. Wird diese Transformation gemä Hilfssatz 1a abgeändert, so wird, da S nach rechts geht, Y' nicht nac links versetzt, so daß wiederum der rechts von S gelegene Teil de Intervalls XY (und also auch das ganze Intervall) auf ein linkes Endstüc abbildbar ist.

Hilfssatz 4a. *Jedes geschlossene Teilintervall von AB kann au ein linkes Endstück von beliebig kleiner Länge abgebildet werden*[9]).

Beweis. Sei XY ein Teilintervall von AB (X links von Y). Nac Hilfssatz 3a gibt es linke Endstücke von XY, auf welche dieses Interva abgebildet werden kann. Die rechten Endpunkte dieser Endstücke be stimmen einen Schnitt Z mit den folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt keinen Punkt Y' zwischen X und Z derart, daß XY auf XY' abgebildet werden kann.

2. Von rechts konvergiert eine Punktreihe $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ gegen derart, daß XY für jedes n auf XY_n abgebildet werden kann.

Gesetzt nun, Hilfssatz 4a sei unrichtig, so würde Z nicht auf X falle dann kann aber XZ auf Grund des Hilfssatzes 3a auf ein linkes End stück XZ' abgebildet werden, und dabei kommen für genügend großes die Punkte Y_n links von Z zu liegen, was der Eigenschaft 1 widerspräch

Hilfssatz 5a. *Sei Q der am meisten nach links gelegene von vie verschiedenen Punkten Q, R, S, T, dann ist QR auf ein Intervall QR' abbildbar (inklusive des veränderten Endpunktes)*[9]), *wobei R' zwische S und T liegt.*

Beweis. Offenbar sind nur zwei Fälle zu betrachten, je nachdem die Ordnung von links $QSTR$ oder $QRST$ ist. Im ersteren Falle kann ST gemäß Hilfssatz 4a abgebildet werden auf ein linkes Endstück von eine Länge kleiner als ST. Im zweiten Falle bilden wir QT ab auf ein linke Endstück von einer Länge kleiner als QR, womit dieser Fall auf de vorigen zurückgeführt ist.

Hilfssatz 6a. *Jedes auf der rechten Seite offene Teilintervall von AB läßt sich auf ein willkürliches linkes Endstück abbilden*[9]).

Beweis. Sei XY das Teilintervall, welches auf das Endstück XZ abgebildet werden soll. Sei $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ eine auf ZY gelegene Punkt reihe, welche von links gegen Y konvergiert und $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ eine auf XZ gelegene Punktreihe, die ebenfalls von links gegen Z konvergiert. Gemä

ilfssatz 5a ist XY_1 auf ein Endstück XY_1' abbildbar, wobei Y_1' zwischen $_1$ und Z_2 liegt. Aus der Homogenität der Menge ($\varkappa$, π_1 oder π_2), zu elcher Y_1 und Y_1' gehören, geht hervor, daß Y_1B auf $Y_1'B$ abbildbar t (und dies mit invarianter Richtung). Komme hierbei Y_2 nach Y_2'. Gemäß ilfssatz 5a ist nun wieder $Y_1'Y_2'$ auf ein Intervall $Y_1'Y_2''$ abzubilden, obei Y_2'' zwischen Z_2 und Z_3 liegt. Auf diese Weise fahren wir fort; ir sorgen, daß Y_3 zwischen Z_3 und Z_4 abgebildet wird, usw. Hiermit t die behauptete Abbildung von XY auf XZ konstruiert.

Hilfssatz 7a. *Zwei willkürliche Teilintervalle von AB, deren nke Endpunkte zu derselben Menge ($\varkappa$, π_1 oder π_2) gehören, lassen sich ufeinander abbilden*[9]) (*die Intervalle wiederum an der rechten Seite ffen gedacht*).

Beweis. Dieser Satz wird auf den vorigen zurückgeführt, wenn wir ie durch die Homogenität postulierte Transformation anwenden, welche en linken Endpunkt des einen Intervalls in den des anderen überführt.

Hilfssatz 8a. *Je zwei an beiden Seiten offene Teilintervalle* (*wo- ei Teilintervall nun auch Endstück sein kann*) *von AB lassen sich ufeinander abbilden*[9]).

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen, wenn man edenkt, daß jedes der beiden Teilintervalle in eine den Ordnungstypus $* + \omega$ besitzende Menge aneinander schließender Intervalle zerlegt werden ann, deren Endpunkte zu derselben Menge $\varkappa$, π_1 oder π_2 gehören.

Schluß des Beweises von Satz 1. Wählen wir innerhalb AB nen Punkt P_1 von π_1 und einen Punkt P_2 von π_2. Bilden wir die ffenen Endstücke AP_1 und P_1B resp. auf AP_2 und P_2B ab und weiter $'_1$ auf P_2, dann erhalten wir eine α-Transformation von AB in sich lbst, wobei $\varkappa$ in sich selbst übergeht und der Punkt P_1 von π_1 in P_2 on π_2. Hiermit ist aber ein Widerspruch gegen unsere obige Annahme zielt und der Beweis des Satzes 1 vollendet.

Satz 2. *Sei die Punktmenge π im Intervall AB homogen im eiteren Sinne und die Komplementärmenge $\varkappa$ von Null verschieden. amit π in AB homogen im engeren Sinne sei, ist notwendig und hin- ichend, daß π sowohl als $\varkappa$ dicht in AB, und daß auch $\varkappa$ in AB mogen im weiteren Sinne sei.*

Beweis. I. Die Bedingung ist notwendig. Ist π in AB homogen n engeren Sinn, dann ist evident, daß dies auch für $\varkappa$ gilt, und daß eide Mengen dicht in AB sind. Homogenität im engeren Sinne bringt er Homogenität im weiteren Sinne mit sich (vgl. zu Anfang), also ist notwendig homogen im weiteren Sinne.

II. Die Bedingung ist hinreichend. Die Menge π und $\varkappa$ sind beide homogen; also kann man sich bei den Transformationen, welche durch ihre Homogenität postuliert werden, gemäß Satz 1 auf α-Transformationen beschränken.

Hilfssatz 1b. *Führt eine, durch die Homogenität von π oder $\varkappa$ postulierte Transformation einen Punkt über in einen mehr nach rechts (links) gelegenen Punkt, dann läßt sich die Abbildung, wenn nötig, immer so abändern, daß kein Punkt nach links (rechts) geht.*

Beweis. Wörtlich gleich dem des Hilfssatzes 1a. —

Wir denken uns im folgenden alle Transformationen gemäß Hilfssatz 1b beschaffen.

Hilfssatz 2b. *Es gibt ein Teilintervall von AB, das auf eines seiner Endstücke abgebildet werden kann*[10]).

Beweis. Nehmen wir an, dieser Satz sei unrichtig, dann ist kein Teilintervall QR von AB auf ein Teilintervall Q_1R_1 von QR abbildbar. Angenommen nämlich, letzteres sei möglich und die Ordnung von links nach rechts QQ_1R_1R. Wählen wir einen Punkt P von π zwischen Q und Q_1. Mit ihm korrespondiert ein Punkt P_1 von π zwischen Q_1 und R_1. Wenden wir die, durch die Homogenität von π postulierte Transformation an, welche P_1 nach P bringt, dann geht R_1 nicht nach rechts (Hilfssatz 1b), und PR wäre auf eines seiner Endstücke abgebildet.

Seien nun P_1 und P_2 zwei willkürliche Punkte von π, wobei P_1 links von P_2 liegt. Gemäß Hilfssatz 1b ist die Transformation, welche P_1 in P_2 überführt, derart, daß kein Punkt innerhalb AB nach links geht; aber wenn kein Teilintervall von AB auf eines seiner Endstücke abgebildet werden kann, kann auch kein Punkt innerhalb AB unverändert bleiben; alle diese Punkte gehen also alle nach rechts. Die Verneinung des Hilfssatzes 2b ergibt weiter, daß es nicht zwei verschiedene Transformationen gibt, bei denen P_1 in P_2 übergeht. Die Transformationen, welche P_1 in die Punkte von π überführen, bilden eine Gruppe, die wir g nennen.

Seien nun P_1, P_2 und P_3 willkürliche Punkte von π, wobei nur P_2 links von P_3 gedacht ist, dann wird der Bildpunkt eines willkürlichen (nicht notwendig zu π gehörenden) Punktes Q bei der Abbildung, welche P_1 in P_2 überführt, links von dem Bildpunkt von Q bei der Transformation, die P_1 nach P_3 bringt, gelegen sein.

Betrachten wir einen willkürlichen Punkt K_1 der Komplementärmenge $\varkappa$, dann wird dieser Punkt durch Transformationen, welche P_1

[10]) Mit Abbildung meinen wir jetzt immer topologische Abbildung, wobei die Richtung invariant bleibt, und π (also auch $\varkappa$) in sich übergeht.

berführen in verschiedene Punkte von π, ebenso übergeführt in verschiedene unkte von $\varkappa$, und *Ordnungsbeziehungen bleiben hierbei erhalten.*

Wählen wir einen zweiten Punkt K_2 von $\varkappa$, dann gibt es in der ruppe g eine Transformation, welche K_1 in K_2 überführt. Da nämlich uch $\varkappa$ homogen ist, gibt es jedenfalls eine Abbildung, welche K_1 auf K_2 bbildet. Führt diese P_1 in P_4 über, dann muß diese Transformation dentisch sein mit dem Element aus g, bei welchem P_1 nach P_4 kommt, a es sonst zwei verschiedene Transformationen geben würde, die P_1 in P_4 berführen. Aus dem Vorhergehenden folgt nun, daß die innerhalb AB elegenen Teile von π und $\varkappa$ eineindeutig und mit Erhaltung der Ordnungselationen aufeinander abbildbar sind, welche Korrespondenz vollständig estimmt ist, wenn man einen willkürlichen Punkt von π und einen willürlichen Punkt von $\varkappa$ einander entsprechen läßt. Da die Ordnungselationen korrespondieren und beide Mengen in AB dicht sind, sind diese bbildungen gleichmäßig stetig, mit anderen Worten sie bestimmen topoogische Abbildungen des ganzen Intervalls AB auf sich selbst.

Sei wiederum P_1 ein willkürlicher Punkt von π. Lassen wir diesen unkt sich selbst entsprechen und weiter jeden links von P_1 gelegenen unkt P von π korrespondieren mit dem Punkte P' von π, in welchen $_1$ durch die Transformation übergeht, die P in P_1 bringt, dann wird offenbar π mit Umkehrung von Ordnungsrelationen auf sich selbst abebildet. Wir wußten bereits, daß eine Abbildung mit Erhaltung von rdnungsrelationen von π auf $\varkappa$ bestimmt wird, wenn man einen willürlichen Punkt von π einem willkürlichen Punkt von $\varkappa$ entsprechen läßt, nd ebenso wird nun auf Grund des Vorstehenden eine Abbildung mit mkehrung von Ordnungsrelationen fixiert. Bei einer derartigen Abbildung ber bestimmen die Punkte von π, welche ihren Bildpunkten vorhergehen, nd die, welche auf ihre Bildpunkte folgen, einen Schnitt, welcher weder u π noch zu $\varkappa$ gehören kann. Damit ist ein Widerspruch erreicht, also ilfssatz 2b bewiesen.

Es gibt also ein Teilintervall QR von AB, das auf eines seiner ndstücke abbildbar ist. Sei dieses ohne Einschränkung der Allgemeinheit in *linkes* Endstück QR'.

Hilfssatz 3b. *Jedes geschlossene Teilintervall von AB kann auf ines seiner linken Endstücke abgebildet werden*[10]).

Der Beweis des Hilfssatzes 3a ist hier anwendbar, wobei jedoch für ie zu $\varkappa$ gehörenden Punkte K_1, K_2 und K_2' die nicht notwendig zu $\varkappa$ ehörenden Punkte Q, R und R' zu nehmen sind. Ferner fällt natürlich ie Teilung von π in π_1 und π_2 weg, und Hilfssatz 1b und 2b tritt an ie Stelle von Hilfssatz 1a bzw. 2a.

Hilfssatz 4b. *Jedes geschlossene Teilintervall läßt sich auf ein linkes Endstück von beliebig kleiner Länge abbilden*[10]).

Der Beweis ist wörtlich dem Hilfssatz 4a zu entnehmen.

Hilfssatz 5b. *Sei Q der am meisten nach links gelegene von vier verschiedenen Punkten Q, R, S, T, dann läßt sich QR auf ein Intervall QR' (inklusive des veränderten Endpunktes) abbilden*[10]), *wobei R' zwischen S und T liegt.*

Der Beweis ist wörtlich dem Hilfssatz 5a zu entnehmen.

Hilfssatz 6b. *Jedes auf der rechten Seite offene Teilintervall von AB läßt sich auf ein willkürliches linkes Endstück abbilden*[10]).

Der Beweis ist dem Hilfssatz 6a zu entnehmen, wobei natürlich π wieder ungeteilt gedacht werden muß und in dem Hinweis 5a durch 5b zu ersetzen ist.

Hilfssatz 7b. *Zwei willkürliche Teilintervalle von AB, deren linke Endpunkte zu derselben Menge (π oder $\varkappa$) gehören, lassen sich aufeinander abbilden*[10]) (*die Intervalle wiederum an der rechten Seite offen gedacht*).

Der Beweis ist wörtlich dem Hilfssatz 7a zu entnehmen.

Schluß des Beweises von Satz 2. Da nun jedes offene Teilintervall von AB und auch das ganze Intervall AB selbst in abzählbar viele, nach dem Ordnungstypus $\omega^* + \omega$ aneinander schließende Intervalle mit Endpunkten aus π (oder $\varkappa$) zerlegt werden kann, ist gezeigt, daß π im engeren Sinne homogen ist, die Bedingungen des Satzes 2 also hinreichen.

(Eingegangen am 14. April 1922.)

Über positive Fourier-Integrale.

Von

Maximilian Mathias in Berlin.

Die Untersuchungen der Herren Carathéodory und Toeplitz[1]) ber Potenzreihen mit positivem Realteil und nicht-negative Fourier-eihen legen eine Verallgemeinerung auf Fourier-Integrale nahe. Herr oeplitz ordnet der Fourier-Reihe:

$$F(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu t}; \qquad (c_{-\nu} = \bar{c}_\nu)$$

e Hermitesche Formenschar:

$$H_n = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\varkappa-\lambda} \xi_\varkappa \bar{\xi}_\lambda \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

[2]). Die Bedingung $H_n \geqq 0$ ist dann notwendig und hinreichend dafür, ß stets $F(t) \geqq 0$ wird.

Ein reelles Fourier-Integral läßt sich nun immer auf die Form:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \omega(x)\, dx$$

ingen, wo $\omega(-x) = \overline{\omega}(x)$ ist. Wählt man jetzt n reelle Parameter $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so treten an die Stelle der Hermiteschen Formen H_n die rmen:

$$H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \omega(x_\varkappa - x_\lambda) \xi_\varkappa \bar{\xi}_\lambda.$$

ie Bedingung $H_n(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0$ für jede Wahl der Parameter $x_1, \ldots, x_n$ weist sich dann analog dem Toeplitzschen Resultat als notwendig und nreichend dafür, daß $f(t)$ stets $\geqq 0$ ausfällt.

---

[1]) C. Carathéodory: Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konanten usw. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **32** (1911), S. 193–217.]

[2]) O. Toeplitz: Über die Fourier-Entwicklung positiver Funktionen. [Rendinti del Circoli Matematico di Palermo **32** (1911), S. 191–192.]

Die Funktionen $\omega(x)$, welche die obige Eigenschaft besitzen, werden im folgenden als „positiv-definite" Funktionen bezeichnet werden. (Vgl. Definition 1.)

Die Verallgemeinerung des Carathéodoryschen Satzes über Potenzreihen bildet dann ein analoges Theorem über die Integralfunktionen der Form:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\omega(x)\,dx \qquad (s = \sigma + ti)$$

es lautet: $f(s)$ besitzt in der Halbebene $\sigma > 0$ dann und nur dann einen *positiven* Realteil, wenn $\omega(x-y)$ „positiv-definit" ist.

Es zeigt sich weiter, daß in der Definition der „positiv-definiten" Funktionen implizite schon *Beschränktheit* und *Stetigkeit* enthalten sind, falls man die Gültigkeit der Fourierschen Integralformel voraussetzt.

Besonders einfach läßt sich der „positiv-definite" Charakter einer Funktion erkennen, falls dieselbe eine Entwickelung der Form:

$$\omega(x-y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\overline{\varphi}_\nu(y)}{\lambda_\nu}$$

mit $\lambda_\nu > 0$ zuläßt. Ein weiteres Hilfsmittel zur Erzeugung „positiv-definiter" Funktionen bilden die Integrale der Form:

$$\omega(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\varrho + x)\,\overline{\chi}(\varrho - x)\,d\varrho.$$

Man zeigt leicht, daß jedes derartige Integral eine „positiv-definite" Funktion $\omega(x-y)$ liefert; es entsteht daher die Frage, ob jede „positiv-definite" Funktion eine solche typische Integraldarstellung zuläßt. Dies scheint in der Tat der Fall zu sein; jedoch habe ich bisher den Beweis nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen führen können.

Die Entscheidung, ob eine vorgelegte Funktion $\omega(x-y)$ „positiv-definit" ist, läßt sich für eine gerade Funktion $\omega(x)$ noch auf andere Weise erbringen, und zwar mit Hilfe der Hermiteschen Polynome. Bildet man nämlich die Konstanten:

$$c_{2n}(p) = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(px)\,e^{-x^2} H_{2n}(x)\,dx$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$, wo p ein positiver Parameter und

$$e^{-x^2} H_{2n}(x) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(e^{-x^2})$$

ist, so erweist sich die Bedingung:

$c_{2n}(p) \geqq 0$ für alle $p > 0$ als notwendig und hinreichend dafür, daß $\omega(x-y)$ „positiv-definit" ist. Aus $c_{2n}(p_0) \geqq 0$ für ein bestimmtes $p = p_0$

nd $n = 0, 1, 2 \ldots$ folgt schon, daß jedenfalls $\omega(x-y)\,e^{-\left(\frac{x-y}{r_0}\right)^2}$ „positiv-finit" ist. Beim Beweise dieses Satzes wird ein Hilfssatz über die ntwickelung nach Hermiteschen Polynomen benutzt, welcher einem ntwickelungssatz nach Laguerreschen Polynomen entspricht, der von errn Wigert[3]) bewiesen wurde.

An Literatur über positive Fourier-Integrale sind noch zwei Arbeiten on Herrn F. Bernstein[4]) zu erwähnen, von denen die zweite nach Abssung der vorliegenden Dissertation erschien. Die dort erhaltenen esultate folgen, soweit der positive Charakter der betrachteten Fourier-ntegrale in Frage kommt, aus den Sätzen 4 und 4a (S. 108, 111) als pezialfälle.

§ 1.

„Positiv-definite" Funktionen und definite Fourier-Integrale.

Definition 1. Es sei $\omega(x)$ eine komplexe Funktion der reellen ariablen x, für die

$$\omega(-x) = \bar{\omega}(x)\ ^5)$$

t. Die Funktion $\omega(x-y)$ soll nun „positiv-definit" heißen, wenn für *des* Wertsystem von n reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die Hermiteschen ormen:

$$1)\quad H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\omega(x_\varkappa - x_\lambda)\,\xi_\varkappa\,\bar{\xi}_\lambda \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

nd.

So ist z. B. die Funktion $e^{-p^2(x-y)^2}$ (p reell) „positiv-definit"; denn ist:

$$e^{-p^2(x-y)^2} = e^{-p^2x^2}\,e^{-p^2y^2}\,e^{2p^2xy} = e^{-p^2x^2}\,e^{-p^2y^2}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2p^2)^\nu}{\nu!}\cdot x^\nu\cdot y^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2p^2)^\nu}{\nu!}\,(e^{-p^2x^2}x^\nu)(e^{-p^2y^2}y^\nu)$$

lso:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}e^{-p^2(x_\varkappa - x_\lambda)^2}\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2p^2)^\nu}{\nu!}\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}(e^{-p^2x_\varkappa^2}x_\varkappa^\nu\xi_\varkappa)(e^{-p^2x_\lambda^2}x_\lambda^\nu\bar{\xi}_\lambda)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2p^2)^\nu}{\nu!}\cdot\left|\sum_{\varkappa=1}^{n}e^{-p^2x_\varkappa^2}x_\varkappa^\nu\xi_\varkappa\right|^2 \geqq 0.$$

---

[3]) S. Wigert: Contributions à la théorie des polynomes d'Abel-Laguerre. rkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **15** (1921), Nr. 25, S. 1.]

[4]) F. Bernstein: 1. Über das Fourier-Integral $\int_0^\infty e^{-x^4}\cos(tx)\,dx$. [Mathematische nnalen **79** (1921), S. 265.] 2. Ein Kriterium für den positiven definiten Charakter n Fourier-Integralen ... [Mathematische Annalen **85** (1922), S. 155.]

[5]) Unter $\bar{a}$ ist immer der zu a konjugiert-komplexe Wert zu verstehen.

Aus der Definition ergeben sich folgende Regeln für das Rechnen mit „positiv-definiten“ Funktionen:

I. Mit $\omega(x-y)$ ist auch $\bar{\omega}(x-y)$ „positiv-definit.“

II. Sind die Funktionen $\omega_\nu(x-y)$ „positiv-definit“ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$), so ist es auch:

$$\omega(x-y) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \omega_\nu(x-y); \qquad (c_\nu \geqq 0)$$

III. Ist in jedem endlichen Intervall der Variablen x:

$$\lim_{m=\infty} \omega_m(x) = \omega(x)$$

und sind alle Funktionen $\omega_m(x-y)$ „positiv-definit“, so ist es auch $\omega(x-y)$.

IV. Ist für jedes endliche x:

$$\omega(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \omega_\nu(x) \qquad (c_\nu \geqq 0)$$

und sind die Funktionen $\omega_\nu(x-y)$ „positiv-definit“, so gilt das gleiche von $\omega(x-y)$.

Satz 1. *Es sei $\omega(x-y)$ „positiv-definit“, aber nicht identisch null. Dann ist:*

$$\omega(0) > 0, \tag{1}$$

$$|\omega(x)| \leqq \omega(0). \tag{2}$$

Beweis. Eine positiv-definite Hermitesche Form hat Hauptabschnitts-Determinanten, die sämtlich $\geqq 0$ ist. Also für $n = 1$, $x_1 = 0$ (eingesetzt in Definition 1) bekommt man: $H(0; \xi_1) \geqq 0$, also $\omega(0) \geqq 0$. Für $n = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$: $H(0, x; \xi_1, \xi_2) \geqq 0$, also:

$$\begin{vmatrix} \omega(0), & \omega(-x) \\ \omega(x), & \omega(0) \end{vmatrix} = \omega^2(0) - |\omega(x)|^2 = 0$$

oder $|\omega(x)| \leqq \omega(0)$. Aus $\omega(0) = 0$ würde aber $\omega(x) \equiv 0$ folgen.

Hilfssatz 2. *Es seien $\omega_1(x)$ und $\omega_2(x)$ komplexe Funktionen wie in Definition 1. Sind nun $\omega_1(x-y)$ und $\omega_2(x-y)$ „positiv-definit“, so gilt dasselbe von:*

$$\omega_1(x-y)\,\omega_2(x-y).$$

Beweis. Setzt man für ein beliebiges Wertsystem von n reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$a_{\varkappa\lambda} = \omega_1(x_\varkappa - x_\lambda),$$

$$b_{\varkappa\lambda} = \omega_2(x_\varkappa - x_\lambda),$$

werden die Hermiteschen Formen:

$$H_1 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda}\, \xi_\varkappa \xi_\lambda$$

$$H_2 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\varkappa\lambda}\, \xi_\varkappa \xi_\lambda$$

) ausfallen. Dann ist aber nach einem Satze von Herrn I. Schur[6]) auch:

$$H_3 = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\lambda}\, \xi_\varkappa \bar{\xi}_\lambda \geqq 0,$$

$\omega_1(x-y)\,\omega_2(x-y)$ „positiv-definit".

Hilfssatz 3[7]). *Es sei $F(x)$ eine integrierbare, beschränkte Funktion reellen Variablen x. Es sei ferner $G(x)$ eine stetige Funktion und $x) = O(|x|^{-1-\delta})$ für wachsendes $|x|$ $(\delta > 0)$. Dann ist:*

$$\lim_{h=0}\; h \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} F(\nu h)\, G(\nu h) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, G(x)\, dx.$$

Beweis. Das Produkt $F(x)\,G(x)$ ist in jedem endlichen Intervall grierbar. Wegen $|F(x)| < c_1$ wird für jedes $h > 0$:

$$S_1 = h \Big| \sum_{\nu=n}^{\infty} F(\nu h)\, G(\nu h) \Big| \leqq h c_1 \sum_{\nu=n}^{\infty} |G(\nu h)$$

$$\leqq c_2 h \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{1+|\nu h|^{1+\delta}} \leqq c_3 h \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{1+|xh|^{1+\delta}}$$

$$= c_3 \int_{nh}^{\infty} \frac{dy}{1+|y|^{1+\delta}} \leqq c_4 (nh)^{-\delta}. \qquad (n \geqq 1).$$

enso wird:

$$S_2 = h \Big| \sum_{\nu=-\infty}^{-n} F(\nu h)\, G(\nu h) \Big| \leqq c_5 (nh)^{-\delta}.$$

iter ist für $\xi > 0$:

$$J_1 = \Big| \int_{\xi}^{\infty} F(x)\, G(x)\, dx \Big| \leqq c_1 \int_{\xi}^{\infty} |G(x)|\, dx \leqq c_6 \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{1+|x|^{1+\delta}} \leqq c_7\, \xi^{-\delta}.$$

enso wird:

$$J_2 = \Big| \int_{-\infty}^{-\xi} F(x)\, G(x)\, dx \Big| \leqq c_8\, \xi^{-\delta}.$$

[6]) Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich n Variablen. [Journ. f. Mathematik **140** (1911), S. 1–28.]

[7]) Ein ähnlicher Satz findet sich bei Hardy und Bromwich: The Definition n infinite Integral ... [Quarterly Journal of Math. **39** (1908), S. 222 u. folg.], es. § 16/17.

Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann bestimme man $\xi = \xi(\varepsilon)$ so groß, daß

$$(4) \qquad (\xi^{-\delta}) < \varepsilon$$

wird. Weiter bestimme man die ganze, positive Zahl n, so daß für jedes $h > 0$:

$$(5) \qquad (n-1)h < \xi \leqq nh$$

wird; das ist möglich, denn aus (5) folgt:

$$\frac{\xi}{h} \leqq n < \frac{\xi}{h} + 1.$$

Dann folgt aus (2) bis (5)

$$(6) \qquad S_1 < c_4 \varepsilon; \quad S_2 < c_5 \varepsilon; \quad J_1 < c_7 \varepsilon; \quad J_2 < c_8 \varepsilon.$$

Hält man nun ξ fest und läßt $h \to 0$ konvergieren, während n stets aus (5) zu bestimmen ist, so wird:

$$\lim_{h=0} \Big| \int_{-\xi}^{+\xi} F(x)\, G(x)\, dx - h \sum_{\nu=-n+1}^{n-1} F(\nu h)\, G(\nu h) \Big| = 0,$$

denn $F(x)\, G(x)$ ist von $-\xi$ bis $+\xi$ *integrierbar*. Man kann also eine nur von ε abhängige Zahl $h_0(\varepsilon)$ so bestimmen, daß für alle $0 < h < h_0(\varepsilon)$

$$\Delta = \Big| \int_{-\xi}^{+\xi} F(x)\, G(x)\, dx - h \sum_{\nu=-n+1}^{n-1} F(\nu h)\, G(\nu h) \Big| < \varepsilon$$

wird. Dann ist aber:

$$\Big| \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, G(x)\, dx - h \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} F(\nu h)\, G(\nu h) \Big| \leqq \Big| \int_{\xi}^{\infty} F(x)\, G(x)\, dx \Big|$$
$$+ \Big| \int_{-\infty}^{-\xi} F(x)\, G(x)\, dx \Big| + \Delta + \Big| h \sum_{\nu=n}^{\infty} F(\nu h)\, G(\nu h) \Big|$$
$$+ \Big| h \sum_{\nu=-\infty}^{-n} F(\nu h)\, G(\nu h) \Big| < (c_4 + c_5 + c_7 + c_8 + 1)\varepsilon,$$

w. z. b. w.

Satz 4 (Hauptsatz). *Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ reelle, integrierbare und beschränkte Funktionen. Man setze:*

$$\omega(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} + i \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}.$$

Ferner existiere:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(tx)\, \varphi(x) + \sin(tx)\, \psi(x)]\, dx.$$

Ist nun $\omega(x-y)$ „positiv-definit", so ist $f(t) \geqq 0$ für jedes reelle

ügen ferner $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ der Fourierschen Integralformel, und umgekehrt $f(t) \geqq 0$ für jedes t, so ist $\omega(x-y)$ „positiv-definit".

Beweis. I. Es sei $f(t) \geqq 0$; dann ist:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(tx)\,\varphi(x) + \sin(tx)\,\psi(x)]\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(ty)\,\varphi(-y) - \sin(ty)\,\psi(-y)]\,dy,$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(tx)\,\Phi(x) + \sin(tx)\,\Psi(x)]\,dx.$$

Hierbei ist:

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$$

e gerade,

$$\Psi(x) = \frac{\psi(x)-\psi(-x)}{2}$$

e ungerade Funktion von x.

Man setze $\omega(x) = \Phi(x) + i\,\Psi(x)$, dann wird:

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\,\omega(x)\,dx.}$$

er ist offenbar $\omega(-x) = \bar{\omega}(x)$, und jedes reelle Fourier-Integral t sich auf diese *Normalform* bringen.

Andererseits liefert die Fouriersche Integralformel:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t\alpha)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t\alpha)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha\right\}dt,$$

$$i\,\Psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} i\sin(tx)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t\alpha)\,\Psi(\alpha)\,d\alpha\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t\alpha)\,\Psi(\alpha)\,d\alpha\right\}dt.$$

mit:

$$\boxed{\omega(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,f(t)\,dt.}$$

Es wird nun

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\omega(x_\varkappa - x_\lambda)\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}(e^{itx_\varkappa}\xi_\varkappa)(e^{-itx_\lambda}\bar{\xi}_\lambda)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left|\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{itx_\varkappa}\xi_\varkappa\right|^2 dt \geqq 0.$$

Aus $f(t) \geqq 0$ folgt also: $\omega(x-y)$ ist „positiv-definit".

II. Es sei jetzt $\omega(x-y)$ „positiv-definit". Da dasselbe von d Funktion $e^{-p^2(x-y)^2}$ gilt, folgt aus Hilfssatz 2, daß auch

$$\Omega(x-y) = \omega(x-y)\,e^{-p^2(x-y)^2}$$

„positiv-definit" ist. Es sei nun $p>0$ und N eine positive ganze Zah Dann konvergiert die Reihe

$$g(\lambda) = \Omega(0) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\Omega\left(\frac{\nu}{N}\right)e^{-i\lambda\nu}$$

für jedes reelle λ. Zu dieser Potenzreihe in $e^{-i\lambda}$ gehören nach den Unte suchungen der Herren Carathéodory und Toeplitz[8]) die *nicht-negative* Hermiteschen Formen:

$$H_n = \sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\Omega\left(\frac{\varkappa-\lambda}{N}\right)\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda \qquad (n=1,2,\ldots$$

welche man für $x_\varkappa = \frac{\varkappa}{N}$ aus Definition 1 erhält, wenn man noch die Funk tion $\omega(x-y)$ durch $\Omega(x-y)$ ersetzt. Wegen $H_n \geqq 0$ ist aber nun de reelle Teil $R[g(\lambda)]$ der Potenzreihe für jedes λ *nicht-negativ*. Weiter is

$$R[g(\lambda)] = \frac{g(\lambda)+\overline{g(\lambda)}}{2} = \frac{\Omega(0)+\overline{\Omega(0)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\Omega\left(\frac{\nu}{N}\right)e^{-i\lambda\nu} + \overline{\Omega\left(\frac{\nu}{N}\right)}\,e^{i\lambda\nu}\right\}$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\Omega\left(\frac{\nu}{N}\right)e^{-i\lambda\nu} \geqq 0;$$

denn nach Definition ist $\Omega(-x) = \overline{\Omega(x)}$. Wählt man jetzt ein reelles fest, so ist für jedes $p>0$ und jedes $N \geqq 1$:

$$R\left[g\left(\frac{t}{N}\right)\right] = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\Omega\left(\frac{\nu}{N}\right)e^{-it\frac{\nu}{N}} \geqq 0.$$

Die Funktionen $F(x) = \omega(x)e^{-itx}$ und $G(x) = e^{-p^2x^2}$ genügen den Voraussetzungen von Hilfssatz 3. Es wird also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega(x)\,e^{-itx}\,dx = \lim_{N=\infty}\frac{1}{N}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\Omega\left(\frac{\nu}{N}\right)e^{-it\frac{\nu}{N}} \geqq 0.$$

[8]) Vgl. Anmerkung [1]) und [2]).

Daraus folgt in bekannter Weise (Abelscher Stetigkeitssatz!) für $p \to 0$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\,\omega(x)\,dx = \lim_{p=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)\,e^{-p^2x^2}\,e^{-itx} \geqq 0,$$

z. b. w.

Folgerung 4a. Für die reelle, gerade, beschränkte Funktion $\varphi(x)$ lte die Fouriersche Integralformel. Es sei $\varphi(x)$ nicht identisch 0, aber

$$\varphi(0) = 0.$$

ann nimmt das Integral

$$J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\,\varphi(x)\,dx$$

positive und *negative* Werte an.

Beweis. Wäre dauernd $J(t) \geqq 0$, so wäre nach Satz 4 $\varphi(x-y)$ positiv-definit", also nach Satz 1 $\varphi(0) > 0$. Ebenso folgte aus $J(t) \leqq 0$: $-\varphi(0) > 0$. Beides widerspricht der Voraussetzung $\varphi(0) = 0$.

Setzt man z. B.:

$$J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\,e^{a_4x^4 + a_6x^6 + \ldots + a_{2k}x^{2k}}\,dx \qquad (a_{2k} < 0).$$

Durch partielle Integration bekommt man für $t \neq 0$:

$$J(t) = -\frac{1}{t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left(e^{a_4x^4 + \ldots + a_{2k}x^{2k}} \right) \right\} dx.$$

Die in der Klammer auftretende zweite Ableitung ist eine gerade unktion von x und verschwindet für $x = 0$. Folgerung 4a zeigt also, aß $J(t)$ mindestens einmal das Vorzeichen wechselt. Für $_4 = a_6 = \ldots = a_{2k-2} = 0$ und $a_{2k} = -1$ erhält man einen Spezialfall, er zuerst von Herrn Bernstein[9]) betrachtet wurde.

Ebenso, durch Heranziehung der zweiten Ableitung, schließt man, aß auch die Integrale:

$$J_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)\,dx}{(e^{x^k} + e^{-x^k})} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots);$$

ositive und negative Werte annehmen. Dagegen ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)\,dx}{(e^x + e^{-x})^\sigma} > 0 \qquad (\sigma > 0);$$

ie Folgerung 5a zeigen wird.

[9]) Vgl. Anm. [4]).

Zur Gewinnung weiterer „positiv-definiter" Funktionen beweist man zunächst noch:

Hilfssatz 5. *Es sei $\chi(x)$ eine komplexe, beschränkte, integrierbare Funktion. Für $\alpha < \sigma < \beta$ gelte für die analytische Funktion $g(s)$ die absolut konvergente Integraldarstellung:*

$$g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} \chi(x)\, dx.$$

Setzt man:

$$\Lambda(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma\varrho} \chi(\varrho + v) \bar{\chi}(\varrho - v)\, d\varrho,$$

so ist:

$$|g(s)|^2 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2itv} \Lambda(v)\, dv.$$

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz gelten folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} |g(s)|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x} e^{-\sigma y} e^{-itx} e^{ity} \chi(x) \bar{\chi}(y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(x+y)} e^{-it(x-y)} \chi(x) \bar{\chi}(y)\, dx\, dy \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma u} e^{-2itv} \chi(u+v) \bar{\chi}(u-v)\, du\, dv \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2itv} \Lambda(v)\, dv. \end{aligned}$$

Beispiel 1. Bekanntlich ist für $0 < \sigma < 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-xs}}{1+e^{-x}}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Also:

$$\left| \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \right|^2 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2tv) \Lambda(v)\, dv.$$

Oder:

$$\frac{2\pi^2}{e^{\pi t} + e^{-\pi t} - 2\cos(2\pi\sigma)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tv) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma\varrho}\, d\varrho}{(1+e^{-\varrho+v})(1+e^{-\varrho-v})} \right\} dv.$$

Die Fouriersche Integralformel liefert dann weiter:

$$\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)\,dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}-2\cos(2\pi\sigma)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\sigma\varrho}\,d\varrho}{(1+e^{-\varrho+t})(1+e^{-\varrho-t})}.$$

Diese Formel zeigt, daß die Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)\,dx}{e^{ax}+e^{-ax}+b} > 0 \qquad \begin{pmatrix} a>0 \\ -2<b\leqq 2 \end{pmatrix}$$

nd.

Beispiel 2. Wendet man Satz 5 auf die Integraldarstellung der -Funktion an, so ergibt sich nach leichter Umrechnung.

$$|\Gamma(\sigma+ti)|^2 = 2\Gamma(2\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2tv)\,dv}{(e^v+e^{-v})^{2\sigma}} \qquad (\sigma>0).$$

Aus Beispiel 1 und 2 und Satz 4 folgt:

Folgerung 5a. Die Funktionen:

$$\frac{1}{[e^{(x-y)}+e^{-(x-y)}]^a}$$

nd

$$\frac{1}{e^{a(x-y)}+e^{-a(x-y)}+b} \qquad \begin{pmatrix} a>0 \\ -2<b\leqq 2 \end{pmatrix}$$

nd „positiv-definit".

Ebenso folgt aus den bekannten Formeln:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-|x|}\,dx = \frac{2}{1+t^2}$$

nd

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|t|},$$

ß die Funktionen $e^{-|x-y|}$ und $\frac{1}{1+(x-y)^2}$ *„positiv-definit"* sind.

Satz 6. *Für die analytische, nicht identisch verschwindende unktion $g(s)$ der komplexen Variablen $s=\sigma+ti$ gelte in der Halbene $\sigma>0$ die Darstellung:*

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\omega(x)\,dx.$$

Hierbei ist $\omega(x)=\overline{\omega}(-x)=\varphi(x)+i\psi(x)$ eine Funktion, für lche die Fouriersche Integralformel gilt.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $g(s)$ in jedem endlichen Punkte der Halbebene $\sigma > 0$ einen positiven Realteil hat, besteht darin, daß $\omega(x-y)$ „positiv-definit" ist[11]).

Beweis. Wegen $\omega(x) = \overline{\omega}(-x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ ist $\varphi(-x) = \varphi(x)$ und $\psi(-x) = -\psi(x)$.

Nun ist aber:

$$R\{g(s)\} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x}[\cos(tx)\varphi(x) + \sin(tx)\psi(x)]\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\sigma|x|}[\cos(tx)\varphi(x) + \sin(tx)\psi(x)]\,dx$$

$$= -\int_0^{-\infty} e^{-\sigma|y|}[\cos(ty)\varphi(y) + \sin(ty)\psi(y)]\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma|x|}[\cos(tx)\varphi(x) + \sin(tx)\psi(x)]\,dx.$$

Ist daher $R\{g(s)\} > 0$, so folgt aus Satz 4:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} e^{-\sigma|x_\varkappa - x_\lambda|}\,\omega(x_\varkappa - x_\lambda)\,\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda \geqq 0,$$

also für $\sigma \to 0$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} \omega(x_\varkappa - x_\lambda)\,\xi_\varkappa\bar{\xi}_\lambda \geqq 0,$$

d. h. $\omega(x-y)$ ist „positiv-definit".

Aus der bekannten Formel:

$$e^{-\sigma|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\sigma v x}}{1+v^2}\,dv$$

schließt man: $e^{-\sigma|x-y|}$ ist für jedes $\sigma > 0$ „positiv-definit"; ist also umgekehrt: $\omega(x-y)$ „positiv-definit", so gilt nach Satz 2 das gleiche von:

$$e^{-\sigma|x-y|}\,\omega(x-y);$$

daher nach Satz 4:

$$R\{g(s)\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma|x|}[\cos(tx)\varphi(x) + \sin(tx)\psi(x)]\,dx \geqq 0.$$

Ist nun s ein im Endlichen gelegener Punkt der Halbebene $\sigma > 0$, so beschreibe man um s einen Kreis K, der noch ganz im Inneren der Halbebene $\sigma > 0$ liegt. Jeder Punkt der Bildkurve von K besitzt dann

---

[11]) Wenn $\omega(x-y)$ „positiv-definit" ist, so folgt nach Satz 4: $R(g(s)) > 0$ bereits *ohne Anwendung* der Fourierschen Integralformel auf $\omega(x)$.

nen *nicht-negativen* Realteil; da aber der Bildpunkt von s im *Inneren* r Bildkurve von K liegt, hat $g(s)$ einen *positiven* Realteil. W. z. b. w.

§ 2.

„Positiv-definite" Funktionen und definite Formen.

Es sei wieder $\omega(x) = (-x)$ eine Funktion wie in Satz 4, und $(x-y)$ „positiv-definit". Dann sind dem *nicht-negativen* Integral:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\,\omega(x)\,dx$$

e definiten Hermiteschen Formen:

$$H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\omega(x_\varkappa - x_\lambda)\,\xi_\varkappa\,\bar{\xi}_\lambda$$

geordnet, deren Koeffizienten noch von den willkürlichen Parametern $, x_2, \ldots, x_n$ abhängen. Eine Hermitesche Form heißt nun bekanntlich „eigentlich positiv-definit", wenn sie stets $\geqq 0$ ist und den Wert 0 r für das System $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \ldots, \xi_n = 0$ annimmt. Nimmt sie doch den Wert 0 auch für Systeme an, die nicht aus lauter Nullen stehen, so heißt sie: „semidefinit".

Für die hier betrachteten Formen gilt nun der Satz:

Satz 7. *$f(t)$ sei > 0 auf einem Intervall positiver Länge. Die* rm $H_n(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n)$ *ist dann und nur dann „eigentlich* sitiv-definit", *wenn die reellen Parameter $x_1, \ldots, x_n$ sämtlich voneinder verschieden sind.*

Beweis. 1. Es sei $H_n = 0$, ohne daß alle $\xi = 0$ sind. Dann ist:

$$0 = H_n = \sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\omega(x_\varkappa - x_\lambda)\,\xi_\varkappa\,\bar{\xi}_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left|\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{itx_\varkappa}\,\xi_\varkappa\right|^2 dt.$$

Also auf einen gewissen Intervall $\alpha \leqq t \leqq \beta$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{itx_\varkappa}\,\xi_\varkappa \equiv 0.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn die Reihenentwicklung um den nkt $t = 0$ verschwindende Koeffizienten hat; also:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \quad \xi_2 + \ldots + \quad \xi_n &= 0 \\ x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + \quad x_n\xi_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \quad &\vdots \\ x_1^{n-1}\xi_1 \qquad + \ldots + x_n^{n-1}\xi_n &= 0. \end{aligned}$$

Da aber nicht alle $\xi = 0$ sein sollten, muß:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{\varkappa > \lambda \\ \varkappa,\lambda=1}}^{n} (x_\varkappa - x_\lambda) = 0$$

sein. Also müssen mindestens zwei unter den $x_\varkappa$ einander gleich sein.

2. Es genügt, zu zeigen, daß, wenn zwei der $x_\varkappa$ einander gleich sind, H_n „semidefinit" ist. Hierzu setze man, falls etwa $x_1 = x_2$ ist, die Variablen $\xi_3 = \xi_4 = \dots = \xi_n = 0$. Außerdem $\xi_1 = 1$; $\xi_2 = -1$. Dann wird $|\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{it x_\varkappa} \xi_\varkappa|^2 \equiv 0$ für alle t. Also $H_n = 0$, w. z. b. w.

In der Theorie der Hermiteschen Formen gilt nun der Satz, daß eine „eigentlich positiv-definite" Form eine *positive* Diskriminante hat. Daraus folgt:

Folgerung 7a. *Wird* $a_{\varkappa\lambda} = \omega(x_\varkappa - x_\lambda)$; $\left(\begin{matrix}\varkappa \\ \lambda\end{matrix}\right\} = 1, 2, \dots, n\Big)$ *gesetzt und sind die reellen Parameter* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *sämtlich voneinander verschieden, so sind die Determinanten:*

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Setzt man z. B. $\omega(x) = e^{-px^2}$ $(p > 0)$ und $x_\varkappa = \varkappa$, so folgt:

$$\begin{vmatrix} 1, & e^{-p}, & e^{-4p}, & \dots, & e^{-n^2 p} \\ e^{-p}, & 1, & e^{-p}, & \dots, & e^{-(n-1)^2 p} \\ \vdots & & & & \\ e^{-n^2 p}, & e^{-(n-1)^2 p}, & \dots, & \dots, & 1 \end{vmatrix} > 0 \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Ebenso für $\omega(x) = \frac{e^{ixp}}{1+qx^2}$ $(q > 0,\ p$ reell):

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{e^{-ip}}{1+q}, & \frac{e^{-2ip}}{1+4q}, & \dots, & \frac{e^{-nip}}{1+n^2 q} \\ \frac{e^{ip}}{1+q}, & 1, & \frac{e^{-ip}}{1+q}, & \dots, & \dots \\ \vdots & & & & \\ \frac{e^{nip}}{1+n^2 q}, & \dots, & \dots, & \dots, & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Für $q = 0$ und $n > 1$ ist diese Determinante identisch 0 für alle p, wie sich aus der Betrachtung der *semidefiniten* Hermiteschen Form

$$H = \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} e^{i(x_\varkappa - x_\lambda)p} \xi_\varkappa \bar{\xi}_\lambda = \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{i x_\varkappa p} \xi_\varkappa \right|^2$$

ibt.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Voraussetzungen des Hauptsatzes 4 wesentlichen schon die Stetigkeit der „positiv-definiten" Funktion $x - y)$ enthalten.

Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 8. *Es sei $\omega(x-y)$ „positiv-definit", und für $\omega(x)$ gelte Fouriersche Integralformel. Wird dann an jeder Stelle x unter $x)$ der durch die Fouriersche Integralformel gelieferte Wert verden, so ist $\omega(x)$ stetig.*

Beweis. Aus Satz 4 folgt:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \omega(x)\, dx \geqq 0 .$$

Aus der Fourierschen Integralformel:

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t)\, dt .$$

Dieses Integral ist aber wegen $|f(t)| = f(t)$ absolut, also auch *gleichßig* konvergent in bezug auf alle x in einem endlichen Intervall. $x)$ ist also stetig.

Durch Differentiation gewinnt man aus einer „positiv-definiten" nktion neue derartige Funktionen; es gilt nämlich der

Satz 9. *Die Funktion $\omega(x) = \overline{\omega}(-x)$ sowie ihre erste und zweite bleitung genüge den Gültigkeitsbedingungen der Fourierschen Integralrmel. Ist nun $\omega(x-y)$ „positiv-definit", so gilt dasselbe von*

$$-\omega''(x-y).$$

Beweis. Es ist

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \omega(x)\, dx = \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \omega'(x)\, dx = -\frac{1}{t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \omega''(x)\, dx ,$$

$$t^2 f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} [-\omega''(x)]\, dx .$$

Aus Satz 4 folgt wegen $f(t) \geqq 0$ die Behauptung.

Folgerung 9a. *Gilt für $\omega(x) = \overline{\omega}(-x)$ und die sämtlichen Abitungen $\omega^{(\nu)}(x)$ bis zur $2n$-ten Ableitung die Fouriersche Integralrmel, und ist $\omega(x-y)$ „positiv-definit", so gilt das gleiche von*

$$(-1)^\nu \omega^{(2\nu)}(x-y) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzt man z. B. $\omega(x) = e^{-x^2}$, so folgt, daß die Funktionen

$$(-1)^\nu H_{2\nu}(x-y)\, e^{-(x-y)^2}$$

„positiv-definit" sind, wo $H_{2\nu}(x)$ das Hermitesche Polynom der Ordnung 2ν bedeutet.

Hierauf gestützt, kann man die Bedingungen dafür, daß eine Funktion $\varphi(x-y)$ „positiv-definit" ist, noch in anderer Weise charakterisieren. Zu diesem Zweck sollen erst einige Hilfssätze über die Entwicklung einer Funktion nach Hermiteschen Polynomen vorausgeschickt werden.

Hilfssatz 10. *$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ seien integrierbare Funktionen, für die die Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$ existieren. Ferner konvergiere*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,dx,$$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sei in jedem endlichen Intervall der Variablen x gleichmäßig konvergent.

Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\}\,dx.$$

Beweis. Setzt man $\int_m^{m+1} f_n(x)\,dx = c_{mn}$, so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} f_n(x)\,dx\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn}\}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{n=0}^{k} \sum_{m=-k}^{+k} |c_{mn}| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' |c_{mn}| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} |f_n(x)|\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\,dx.$$

Die Doppelsumme $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn}$ ist somit *absolut* konvergent und daher:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mn} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{\sum_{n=0}^{\infty} \int_m^{m+1} f_n(x)\,dx\}$$

Für jedes m ist auf Grund der Voraussetzungen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_m^{m+1} f_n(x)\,dx = \int_m^{m+1} [\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)]\,dx,$$

also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} [\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)]\,dx.$$

Nun existiert aber das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\}\, dx,$$

nn man hat

$$\int_{N}^{N+m} \{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{N}^{N+m} f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=N}^{N+m-1} \int_{\nu}^{\nu+1} f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=N}^{N+m-1} c_{\nu n}.$$

Daher

$$\left|\int_{N}^{N+m} \{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\}\, dx\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=N}^{\infty} |c_{\nu n}|$$

nd ebenso

$$\left|\int_{-N-m}^{-N} \{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\}\, dx\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=-N} |c_{\nu n}|$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\}\, dx$ existiert also, und folglich wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\}\, dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{m}^{m+1} \{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx,$$

. z. b. w.

Hilfssatz 11. *Es seien x und λ reell, und $H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.*
Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,(i\lambda)^n}{\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-ix\lambda + \frac{\lambda^2}{4}}.$$

Beweis. Es ist

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}\, e^{-t^2}\, dt, \qquad H_n(x)\, e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}\, e^{-t^2}\, (2it)^n\, dt.$$

omit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,(i\lambda)^n}{\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!} = \frac{e^{x^2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}\, e^{-t^2}\, \frac{(-\lambda t)^n}{n!}\, dt.$$

Jun ist aber

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}\, e^{-t^2}\, \frac{(-\lambda t)^n}{n!}\, dt\right| \leqq \frac{|\lambda|^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, |t|^n\, dt$$

$$= \frac{|\lambda|^n}{n!} \int_{0}^{\infty} e^{-v}\, v^{\frac{n-1}{2}}\, dv = |\lambda|^n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}.$$

Hilfssatz 10 ist somit auf $f_n(t) = e^{2itx} e^{-t^2} \frac{(-\lambda t)^n}{n!}$ anwendbar und liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)(i\lambda)^n}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} = \frac{e^{x^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx} e^{-t^2} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{e^{x^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2it\left(x+\frac{i\lambda}{2}\right)} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{e^{x^2}}{\pi} \sqrt{\pi}\, e^{-\left(x+\frac{i\lambda}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-ix\lambda+\frac{\lambda^2}{4}}$$

Hilfssatz 12. *Es sei* $\varphi(x)$ reell, integrierbar und $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx$ *existiere.* *Setzt man*:

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-x^2} H_n(x) dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so ist für $0 < r < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\left(\frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2} dx.$$

Ist $\varphi(y)$ *im Punkte* $y = y_0$ *stetig, so wird*:

$$\lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^n H_n(y_0)}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} = \varphi(y_0)$$

Beweis. Aus:

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-x^2} H_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx} e^{-t^2} (2it)^n dt \right\} dx$$

folgt für $0 < r < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx} e^{-t^2} \frac{(2itr)^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} dt \right\} dx.$$

Nun ist aber:

$$(8) \qquad |H_n(y)| \leqq e^{y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ity} e^{-t^2} (2it)^n dt \right|$$

$$\leqq \frac{e^{y^2} \cdot 2^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\frac{n-1}{2}} dv = \frac{e^{y^2} \cdot 2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

o:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}e^{-t^2}\frac{(2itr)^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\,dt\right|$$

$$\leqq \frac{r^n e^{y^2}2^n}{\pi\, n!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}|t|^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)dt = \frac{r^n e^{y^2}2^n\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2}{\pi\,\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{e^{y^2}r^n}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = O(e^{y^2}r^n).$$

Hilfssatz 10 ist wegen (8) und (9) auf:

$$f_n(x) = \varphi(x)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}e^{-t^2}\frac{(2itr)^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\,dt\right\}$$

vendbar; somit:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}e^{-t^2}\frac{(2itr)^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\,dt\right\}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}e^{-t^2}\frac{(2itr)^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\,dt\right\}dx.$$

Wendet man jetzt Hilfssatz 10 auf:

$$f_n(t) = e^{2itx}e^{-t^2}\frac{(2itr)^n}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}H_n(y)$$

so ergibt (8):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)|\,dt \leqq \frac{r^n e^{y^2}2^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,n!\,\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}|t|^n dt$$

$$= \frac{r^n e^{y^2}2^n\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2}{\pi\,\Gamma(n+1)} = O(e^{y^2}r^n).$$

Satz 10 ist also anwendbar und liefert:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}e^{-t^2}\frac{(2itr)^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}e^{-t^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(y)(2itr)^n}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx}e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-ty2tr+t^2r^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2it(x-ry)}e^{-t^2(1-r^2)}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}e^{-\left(\frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2},$$

daher:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-\left(\frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2} dx.$$

Setzt man noch: $\sqrt{1-r^2} = p$, so wird:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n r^n H_n(y)}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-\left(\frac{x-y\sqrt{1-p^2}}{p}\right)^2} dx. \tag{10}$$

Ist nun $\varphi(x)$ im Punkte y_0 *stetig*, so konvergiert für $r \to 1$, d. h. $p \to 0$ die rechte Seite von (10) gegen $\varphi(y_0)$, wie man in bekannter Weise nach Weierstraß[12]) zeigt.

Satz 13. *Die reelle, gerade, stetige Funktion* $\varphi(x)$ *sei im Unendlichen absolut integrierbar. Man setze für* $p > 0$:

$$c_{2n}(p) = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(px)\, e^{-x^2} H_{2n}(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\varphi(x-y)$ *„positiv-definit" ist, lautet:*

$$c_{2n}(p) \geqq 0$$

für jedes $p > 0$ *und* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweis. I. Es sei $\varphi(x-y)$ „positiv-definit". Dann ist:

$$c_{2n}(p) = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(px) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx} e^{-t^2} 2^{2n} (-1)^n t^{2n}\, dt \right\} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx} e^{-t^2} (2t)^{2n} \varphi(px)\, dt\, dx.$$

Wegen der absoluten Konvergenz des Doppelintegrals ist:

$$c_{2n}(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (2t)^{2n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx} \varphi(px)\, dx \right\} dt.$$

Nach Satz 4 wird aber:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2itx} \varphi(px)\, dx \geqq 0,$$

also

$$c_{2n}(p) \geqq 0.$$

[12]) Weierstraß, Werke, Bd. III. S. 1. „Über die Darstellbarkeit sog. willkürlicher Funktionen ...".

II. Es sei für jedes $p > 0$:

$$c_{2n}(p) \geqq 0.$$

Wegen $\varphi(x) = \varphi(-x)$ wird dann:

$$a_{2n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(px)\, e^{-x^2} H_{2n+1}(x)\, dx = 0$$

r $n = 0, 1, 2 \ldots$. Somit nach Hilfssatz 12:

$$\lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_{2n}(p)\, H_{2n}(y)\, r^{2n}}{\sqrt{\pi}\, 2^{2n} \cdot (2n)!} = \varphi(py).$$

lso:

$$1) \quad \lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}(p)\, \{(-1)^n H_{2n}(x-y)\, e^{-(x-y)^2}\} \cdot r^{2n}}{\sqrt{\pi}\, 2^{2n} \cdot (2n)!} = \varphi(p[x-y])\, e^{-(x-y)^2}$$

Nach Folgerung 9a ist aber:

$$c_{2n}(p)(-1)^n H_{2n}(x-y)\, e^{-(x-y)^2}$$

positiv-definit"; die linke Seite von (11) setzt somit in Evidenz, daß

$(p[x-y])\, e^{-(x-y)^2}$, also auch $\varphi(x-y)\, e^{-\left(\frac{x-y}{p}\right)^2}$ „positiv-definit" ist. ieraus folgt für $p \to +\infty$ die Behauptung.

Aus dem Beweise folgt noch der

Zusatz 13a. *Ist für ein festes* $p = p_0$

$$c_{2n}(p_0) \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ist jedenfalls:

$$\varphi(x-y)\, e^{-\left(\frac{x-y}{p_0}\right)^2}$$

positiv-definit".

Als weitere Folgerung aus Satz 4 sei noch folgender Satz erwähnt:

Satz 14. *Es seien* $\omega_1(x)$ *und* $\omega_2(x)$ *zwei integrierbare, beschränkte unktionen, für die* $\omega_1(-x) = \overline{\omega}_1(x)$ *und* $\omega_2(-x) = \overline{\omega}_2(x)$ *ist, und r welche die Fouriersche Integralformel gilt. Ebenso gelte dieselbe r ihr Produkt*: $\omega_1(x)\,\omega_2(x)$. *Ist dann*

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\, \omega_1(x)\, dx \geqq 0$$

nd

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\, \omega_2(x)\, dx \geqq 0,$$

ist auch:

$$f_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\, \omega_1(x)\, \omega_2(x)\, dx \geqq 0.$$

Beweis. Aus Satz 4 folgt, daß $\omega_1(x-y)$ und $\omega_2(x-y)$ „positiv definit" sind, also nach Hilfssatz 2 auch $\omega_1(x-y)\,\omega_2(x-y)$.

Bereits in Satz 5 traten „positiv-definite" Funktionen auf, die eine Integraldarstellung der Form:

$$\omega(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(\varrho+x)\,\bar{\chi}(\varrho-x)\,d\varrho$$

besaßen.

Allgemein gilt hier der

Satz 15. *Für jedes reelle x existiere das Integral:*

$$\Lambda(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(\varrho+x)\,\bar{\chi}(\varrho-x)\,d\varrho.$$

Dann ist: $\Lambda(x-y)$ „positiv-definit".

Beweis. Man hat:

$$\Lambda(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(\varrho+x)\,\bar{\chi}(\varrho-x)\,d\varrho$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(u)\,\bar{\chi}(u-2x)\,du \qquad (\varrho+x=u).$$

Also:

$$\Lambda(x-y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(u)\,\bar{\chi}(u-2x+2y)\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(\varrho+2x)\,\bar{\chi}(\varrho+2y)\,d\varrho \qquad (u-2x)=\varrho.$$

Somit:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\Lambda(x_\varkappa-x_\lambda)\,\xi_\varkappa\,\bar{\xi}_\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}\chi(\varrho+2x_\varkappa)\,\bar{\chi}(\varrho+2x_\lambda)\,\xi_\varkappa\,\bar{\xi}_\lambda\Big\}\,d\varrho$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\sum_{\varkappa=1}^{n}\chi(\varrho+2x_\varkappa)\,\xi_\varkappa\Big|^2\,d\varrho\geqq 0,$$

w. z. b. w.

Umgekehrt entsteht das Problem, ob jede „positiv-definite" Funktion $\omega(x-y)$ eine Integraldarstellung der Form:

$$\omega(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(\varrho+x)\,\bar{\chi}(\varrho-x)\,d\varrho$$

besitzt.

Die Auflösung dieser Integralgleichung erfordert weitergehende Hilfsmittel. Bisher habe ich den Beweis für die Auflösbarkeit nur unter folgenden Voraussetzungen erbringen können:

1. $\omega(x-y)$ sei „positiv-definit".
2. $\omega(x)$, $\omega'(x)$, $\omega''(x)$, $\omega'''(x)$ seien im Unendlichen absolut integrierbar.

Man setze:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\,\omega(x)\,dx$$

$$\chi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\sqrt{f(t)}\,dt.$$

3. Für alle reellen x existiere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi\left(\varrho+\frac{x}{2}\right)\bar{\chi}\left(\varrho-\frac{x}{2}\right)d\varrho.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt dann die Beziehung:

$$\omega(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\left(\varrho+\frac{x}{2}\right)\bar{\chi}\left(\varrho-\frac{x}{2}\right)d\varrho.$$

(Eingegangen am 17. April 1922.)

Über die Darstellung und Zusammensetzung nichteuklidischer Raumbewegungen[1]).

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Die Bestimmung der elliptischen Bewegungen eines linearen Raume $R_3(x, y, z)$ erweist sich als gleichwertig mit der Bestimmung der Euklidischen Bewegungen B eines linearen $R_4(x, y, z, q)$ um einen festgehaltenen Punkt O; man hat nur das Bündel O mit einem geeigneten R_3 $(q = 1)$ aufzufangen (Nr. 1). Eine Bewegung B des R_4 denke man sich aus zwei einfacheren Fundamentalbewegungen W_0 und D_q zusammengesetzt; W_0 bedeutet eine Wendung um eine beliebig aber fest gewählte Achse d_0, mit den Richtungskosinus $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0$, und D_q eine positive Drehung um die q-Achse durch einen Drehwinkel δ_0 (Nr. 3). Die W_0 projiziert sich im R_3 als eine harmonische Perspektivität, die leicht darzustellen ist; die D_q wird in bekannter Weise durch die Komponenten A_0, B_0, C_0, D_0 einer Einheitsquaternion angegeben. Da die aus W_0 und D_q zusammengesetzte Substitution die Determinante -1 besitzt, hat man noch eine Spiegelung an O im R_3 $(q = 0)$ hinzuzufügen, um zu den B zu gelangen (Nr. 4).

Bei der Ausführung der Rechnung zeigt sich, daß ständig vier gewisse, sowohl in den λ_0, μ_0, ν_0, wie in den A_0, B_0, C_0, D_0 lineare Klammerfaktoren $T, T_\lambda, T_\mu, T_\nu$ wiederkehren. Kombiniert man dieses Größenquadrupel mit dem andern der Produkte $A, A_\lambda, A_\mu, A_\nu$ von D_0, A_0, B_0, C_0 mit π_0, so gelangt man zu acht überzähligen Parametern, die durch zwei einfache Relationen verknüpft sind. Weiterhin erweist es sich als zweck-

[1]) In meinen Vorlesungen bediene ich mich des Beiwortes „übereuklidisch", das mir treffender zu sein scheint, da es erkennen läßt, daß auch das „Euklidische" mit darunter — als Ausartungsfall — enthalten ist. Auf die naheliegenden Beziehungen des Textes zur Relativitätstheorie der Lorentztransformationen gedenke ich an anderer Stelle näher einzugehen

ßig, lieber die Summen und Differenzen $A \pm T$, $A_\lambda \pm T_\lambda, \ldots$ als die entlichen Bausteine $S, S_\lambda, \ldots$; $D, D_\lambda, \ldots$ des Ganzen zugrunde zu legen, zwei ganz gleich gebauten Relationen genügen (Nr. 7).

Die Koeffizienten a_{ik} von B erweisen sich dann als relativ einfache dratische homogene Formen der acht Parameter (Nr. 8).

Umgekehrt lassen sich bei vorgegebenen a_{ik} die Parameter unter junktion einer einzigen Quadratwurzel rational ausdrücken (Nr. 9).

Behufs weiterer Verwendung der B erscheint es notwendig, deren lle Darstellung in eine komplexe Gestalt überzuführen, indem man tt der x, y, z, q die Verbindungen $\zeta = x + iy$, $\bar{\zeta} = x - iy$, $\eta = p + iq$, $= p - iq$ nebst den entsprechenden transformierten einführt.

Damit lassen sich die vier Darstellungsformeln für x', y', z', q' der B nur zwei, für ζ' und η', von besonders einfacher Bauart zusammenhen (Nr. 10).

Der Vorteil dieser komplexen Darstellung der B zeigt sich sofort, nn man insbesondere die Bewegungen B des von O ausgehenden nimalüberkegels K in sich untersucht (Nr. 11). Dann gelangt man zu ei Paaren induzierter binärer unimodularer Substitutionen, die den ternären Substitutionen der B eineindeutig zugeordnet sind.

Auf Grund dieses Reduktionsverfahrens wird es nunmehr leicht, die sammensetzung zweier B aus der Zusammensetzung der beiden Paare sprechender binärer Substitutionen herzuleiten (Nr. 12).

Mit Hilfe einer Cliffordschen Biquaternion q läßt sich dann die sammensetzung von B und B' zu B'' in ein einziges symbolisches ltiplikationsgesetz $q'' = qq'$ zusammenpressen (Nr. 13).

Für weitergehende Anwendungen empfiehlt es sich jedoch, wiederum obigen Summen und Differenzparameter $S, S_\lambda \ldots$; $D, D_\lambda \ldots$ heranziehen.

Dann läßt sich eine elliptische R_3-Bewegung ersetzen durch die erposition zweier unabhängiger Euklidischer R_3-Drehungen (Nr. 14). dererseits erscheint eine B des R_4 direkt als die Zusammensetzung ier unabhängiger Drehungen um zwei zueinander senkrechte Ebenen E, E', zugleich die beiden einzigen reellen Fixebenen des R_4 sind (Nr. 15).

Diese Fixebenen E, E' oder auch die ihren korrespondierenden Fixaden e, e' eines Projektions-R_3 lassen sich nach außerordentlich einem Gesetze durch die bezüglichen Drehelemente darstellen, woraus von selbst eine elementare Konstruktion der Geraden e, e' anschließt.

Die hiermit skizzierte Methode zur Behandlung der elliptischen Bewegungen läßt sich auf den hyperbolischen Fall übertragen, wobei Formeln freilich nicht unerheblich an Symmetrie einbüßen. Denn t handelt es sich um die Superposition „hyperbolischer" Quaternionen,

deren Komponenten A, B, C, D je einer Relation von der Form $C^2+D^2-(A^2+B^2)=1$ genügen.

Um indessen die Symmetrie soviel wie möglich zu retten, empfiehlt es sich, auf die Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ der Euklidischen R_3-Drehungen — oder auch der elliptischen Bewegungen der Ebene — zurückzugehen. Ersetzt man hier den mittleren Winkel ϑ durch den entsprechenden hyperbolischen θ, d. h. ersetzt man $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ durch die hyperbolischen Funktionen $S(\theta)$ und $C(\theta)$, so geht man damit auch von der gewöhnlichen Quaternion zur hyperbolischen über (Nr. 17). Zum Schluß wird noch auf die Natur der elliptischen „Kugeln" des R_3 eingegangen (Nr. 18).

1. Im linearen R_4 seien x, y, z, q rechtwinklige Punktkoordinaten mit O als Anfangspunkt. Dann ist die Gruppe der, O festlassenden Bewegungen B des R_4, dargestellt durch die orthogonalen Substitutionen mit der Determinante Eins:

$$(I)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}q, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

wo die Koeffizienten a_{ik} an die bekannten Orthogonalitätsbedingungen[2] gebunden sind, die sich aus der Identität:

$$(1)\qquad x'^2+y'^2+z'^2+q'^2 \equiv x^2+y^2+z^2+q^2$$

ergeben. Oder auch: (I) ist die Gesamtheit der unimodularen Kollineationen des R_4, die den Minimalüberkegel K:

$$(2)\qquad K \equiv x^2+y^2+z^2+q^2 = 0$$

in sich überführen.

2. Man schneide das Bündel (O) mit einem R_3, etwa:

$$(3)\qquad q = 1,$$

O_1 sei die Spur der q-Achse.

Dann induziert (I) im R_3 (3) die *elliptischen Raumbewegungen* B_1, d. i. die Gesamtheit der Kollineationen der Punkte $(x, y, z, 1)$, die die nullteilige Grund-Kugel K_1:

$$(2_1)\qquad K_1 \equiv x^2+y^2+z^2+1 = 0$$

invariant lassen. Macht man hier wieder mit einer Größe q homogen, so geht (2_1) formal rückwärts in (2) über. Normiert man überdies die homogenen x', y', z', q' des R_3 so, daß die Kollineationsdeterminante den

[2]) Aus diesen Bedingungen folgt, daß in (I) jedes Element a_{ik} gleich seinem Minor α_{ik} ist, und vice versa.

ert Eins erhält, so gelangt man zu (I) zurück. In diesem Sinne läßt h also sagen:

„Die Bestimmung der orthogonalen B (I) im R_4 ist gleichwertig mit r Bestimmung der elliptischen Bewegungen B_1 des R_3."

NB. Dies gilt mutatis mutandis auch für die hyperbolischen Bewegen des R_3: man hat nur in (1) und (2) q'^2 mit $-q'^2$, q^2 mit $-q^2$ vertauschen. Die im folgenden für die elliptischen Bewegungen entckelte Methode läßt sich ohne weiteres auf die hyperbolischen Bewegen übertragen; es wird sich aber ein Mittel angeben lassen, um die züglichen unbequemen Rechnungen zu umgehen (s. Nr. 17).

3. Die orthogonalen B (I) bilden ein einfach zusammenhängendes hsfach ausgedehntes reelles Kontinuum; sie stellen die Gesamtheit der htwinkligen Vierkante im R_4 mit fester Spitze O dar.

Man setze jetzt irgendeine B (I) aus zwei einfacheren Fundamentalbstitutionen zusammen, die mit W_0 und D bezeichnet seien. Hier betutet W_0 die Wendung (Umlegung) des R_4 um eine beliebig, aber fest wählte Achse d_0 durch O, mit den Richtungskosinus $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0$, wo $+\mu_0^2+\nu_0^2+\pi_0^2=1$; andererseits D_q eine positive Drehung des R_4 um e q-Achse, durch einen Winkel δ_0. Jede dieser beiden Operationen irt drei Parameter mit sich; ihre Zusammensetzungen (W_0, D_q) erzeugen o, noch mit einer gewissen Spiegelung (s. u.) verbunden, eine Gesamtit von B (I) mit sechs Parametern. Es wird sich von selbst zeigen, ß beide Gesamtheiten eineindeutig aufeinander beziehbar sind und damit sammenfallen.

4. Zuerst werde W_0 dargestellt. Da jede auf d_0 in O senkrechte rade als Ganzes in sich übergeht, und alle diese Geraden in dem zu d_0 krechten Raume Δ_0:

$$\Delta_0 \equiv x\lambda_0 + y_0\mu_0 + z\nu_0 + q\pi_0 = 0$$

gen, so projiziert sich W_0 im R_3 (3) als eine harmonische Perspektivität, t dem Zentrum $P_0(x_0\ y_0\ z_0\ 1)$, der Spur von d_0, und der Zentralne Π_0:

$$\Pi_0 \equiv xx_0 + yy_0 + zz_0 + 1 = 0,$$

Spur von Δ_0; Π_0 ist zugleich die Polarebene von P_0 bezüglich der lteiligen Kugel K_1 (2_1).

Somit lauten die Gleichungen für W_0 (in nichthomogener Form):

$$W_0) \quad \begin{cases} x'-x_0 = -(x-x_0),\ y'-y_0 = -(y-y_0),\ z'-z_0 = -(z-z_0), \\ x'x_0 + y'y_0 + z'z_0 + 1 = xx_0 + yy_0 + zz_0 + 1. \end{cases}$$

Macht man diese Gleichungen mit q', q homogen, so lassen sie sich leicht nach den x', y', z', q' auflösen, indem man die drei ersten mit x_0, y_0, z_0 multipliziert und addiert, und dann den so gewonnenen Wert von q' in die drei ersten einsetzt. Andererseits mache man auch die x_0, y_0, z_0 mit q_0 homogen, und normiere die x_0, y_0, z_0, q_0, indem man sie direkt den ihnen proportionalen Richtungskosinus $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0$ von O gleichsetzt. Damit wird der gemeinsame Nenner $\lambda_0^2+\mu_0^2+\nu_0^2+\pi_0^2$ der Koeffizienten, die mit w_{ik} bezeichnet seien, gleich Eins, und man erhält für W_0 das symmetrische Schema:

$$(\mathrm{III})\, W_0) \qquad \begin{cases} x' = w_{11}x + w_{12}y + w_{13}z + w_{14}q, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

wo die w nur zwei verschiedene Typen aufweisen:

$$(5) \qquad \begin{cases} w_{\lambda\lambda} = \lambda_0^2 - \mu_0^2 - \nu_0^2 - \pi_0^2 = 2\lambda_0^2 - 1 \\ w_{\lambda\mu} = w_{\mu\lambda} = 2\lambda_0\mu_0 \end{cases} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4$$

Hier hat die Determinante $|w_{ik}|$ den Wert -1. Denn wegen des inv volutorischen Charakters von W_0 kann die Determinante nur einen der beiden Werte ± 1 annehmen; eine geeignete Spezialisierung z. B. $\lambda_0 = \mu_0 = \nu_0 = 1$, $\pi_0 = 1$ zeigt, daß -1 der richtige Wert ist.

5. Die Drehung D_q um die q-Achse, deren Koeffizienten mit b_{ik} bezeichnet seien, läßt sich ohne weiteres hinschreiben. Denn für $i, k = 1, 2, 3$ sind die b_{ik} die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution des R_3, während die Randelemente, bis auf $b_{44} = 1$, alle verschwinden.

Für die b_{ik} wählen wir die bekannte Darstellung mittels der Komponenten A_0, B_0, C_0, D_0 einer Einheitsquaternion, so daß:

$$(6) \qquad A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 + D_0^2 = 1.$$

Dann genügt es, für die b die Typen zu notieren.

$$(\mathrm{III})\, D_q) \qquad \begin{cases} b_{11} = (A_0^2 + D_0^2) - (B_0^2 + C_0^2), \\ b_{12} = 2(A_0B_0 - C_0D_0), \\ b_{21} = 2(A_0B_0 + C_0D_0) \end{cases} \text{(und zyklisch so weiter)},$$
$$b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0, \quad b_{44} = 1.$$

Da diese Substitution unimodular ist, so liefert ihre Zusammensetzung mit W_0 eine Substitution mit der Determinante -1. Um also zu (I) zu gelangen, hat man noch schließlich eine Spiegelung von O im R_3 hinzuzufügen von der Art:

$$(7) \qquad x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad q' = q.$$

6. Damit ergibt sich durch Zusammensetzung von W_0, D_q und (7) für die a_{ik} in (I) ein Schema der folgenden Struktur:

$$8)\quad \begin{cases} -a_{11} = b_{11}(2\lambda_0^2 - 1) + 2b_{12}\lambda_0\mu_0 + 2b_{13}\lambda_0\nu_0, \\ -a_{12} = 2b_{11}\lambda_0\mu_0 + b_{12}(2\mu_0^2 - 1) + 2b_{13}\mu_0\nu_0, \\ -a_{13} = 2b_{11}\lambda_0\nu_0 + 2b_{12}\mu_0\nu_0 + b_{13}(2\nu_0^2 - 1), \\ -a_{14} = 2b_{11}\lambda_0\pi_0 + 2b_{12}\mu_0\pi_0 + 2b_{13}\nu_0\pi_0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{41} = 2\lambda_0\pi_0, \quad a_{42} = 2\mu_0\pi_0, \quad a_{43} = 2\nu_0\pi_0, \quad a_{44} = 2\pi_0^2 - 1, \end{cases}$$

wo für die b ihre Werte aus (III) einzutragen sind.

7. Um zunächst die a_{ik} mit ungleichen Indizes zu berechnen, empfiehlt es sich, an deren Stelle vorab deren Summen s_{ik} und Differenzen d_{ik} in Angriff zu nehmen:

$$9)\qquad s_{ik} = a_{ki} + a_{ik}, \quad d_{ik} = a_{ki} - a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Bei der Ausführung dieser Bildungen beobachtet man, daß fortdauernd die nämlichen vier Klammerfaktoren auftreten, die gleich als neue selbständige Größen T_λ, T_μ, T_ν, T eingeführt seien, und die, einmal nach den λ_0, μ_0, ν_0, andererseits nach den A_0, B_0, C_0, D_0 geordnet, die übersichtliche Struktur besitzen:

$$10)\quad \begin{cases} T_\lambda = \lambda_0 D_0 - \mu_0 C_0 + \nu_0 B_0 - 0\cdot A_0 + \nu_0 B_0 - \mu_0 C_0 + \lambda_0 D_0, \\ T_\mu = \lambda_0 C_0 + \mu_0 D_0 - \nu_0 A_0 = -\nu_0 A_0 + 0\ B_0 + \lambda_0 C_0 + \mu_0 D_0, \\ T_\nu = -\lambda_0 B_0 + \mu_0 A_0 + \nu_0 D_0 = \mu_0 A_0 - \lambda_0 B_0 + 0\cdot C_0 + \nu_0 D_0, \\ -T = \lambda_0 A_0 + \mu_0 B_0 + \nu_0 C_0 = \lambda_0 A_0 + \mu_0 B_0 + \nu_0 C_0 + 0\cdot D_0. \end{cases}$$

Zugleich empfiehlt es sich im weiteren, an Stelle der A_0, B_0, C_0, D_0 lieber deren Produkte mit π_0 als ein zweites Quadrupel selbständiger Größen einzuführen, wie folgt:

$$11)\quad A_\lambda = A_0\pi_0, \quad A_\mu = B_0\pi_0, \quad A_\nu = C_0\pi_0, \quad A = D_0\pi_0.$$

Die Gleichungen (10) lassen sich sowohl nach den λ_0, μ_0, ν_0, wie nach den A_0, B_0, C_0, D_0 in einfacher und übersichtlicher Weise auflösen:

$$10')\quad \begin{cases} A_0(1-\pi_0^2) = 0\cdot T_\lambda - \nu_0 T_\mu + \mu_0 T_\nu - \lambda_0 T, \\ B_0(1-\pi_0^2) = \nu_0 T_\lambda + 0\cdot T_\mu - \lambda_0 T_\nu - \mu_0 T, \\ C_0(1-\pi_0^2) = -\mu_0 T_\lambda + \lambda_0 T_\mu + 0\cdot T_\nu - \nu_0 T, \\ D_0(1-\pi_0^2) = \lambda_0 T_\lambda + \mu_0 T_\mu + \nu_0 T_\nu + 0\cdot T; \end{cases}$$

$$10'')\quad \begin{cases} \lambda_0\pi_0 = (AT_\lambda - TA_\lambda) - (A_\mu T_\nu - A_\nu T_\mu), \\ \mu_0\pi_0 = (AT_\mu - TA_\mu) - (A_\nu T_\lambda - A_\lambda T_\nu), \\ \nu_0\pi_0 = (AT_\nu - TA_\nu) - (A_\lambda T_\mu - A_\mu T_\lambda). \end{cases}$$

Überdies ergeben sich für π_0 die beiden Darstellungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} \pi_0^2 = A^2 + A_\lambda^2 + A_\mu^2 + A_\nu^2, \\ 1 - \pi_0^2 = T^2 + T_\lambda^2 + T_\mu^2 + T_\nu^2. \end{cases}$$

Der so dargestellten Quadratwurzel π_0 läßt sich ein beliebig, aber fes gewähltes Vorzeichen beilegen. Denn ein gleichzeitiger Zeichenwechsel de $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0$; A_0, B_0, C_0, D_0, oder auch der $T, T_\lambda, T_\mu, T_\nu$; $A, A_\lambda, A_\mu, A_\nu$ läßt die Werte der a_{ik} (s. u. Nr. 8) ungeändert. Oder, wie man sich auch ausdrückt, die beiden Parameterquadrupel der T und A bilden zusammen einen *Tensor*.

Aus (10) und (12) fließen die beiden wichtigen Beziehungen zwischen beiden Quadrupeln:

$$\begin{cases} (\mathrm{IV}_1) \qquad A^2 + A_\lambda^2 + A_\mu^2 + A_\nu^2 + T^2 + T_\lambda^2 + T_\mu^2 + T_\nu^2 = 1 \\ (\mathrm{IV}_2) \qquad A T + A_\lambda T_\lambda + A_\mu T_\mu + A_\nu T_\nu = 0. \end{cases}$$

Hierdurch reduzieren sich die überzähligen acht neuen Parameter auf sechs unabhängige, wie es sein muß.

Für das Folgende sei gleich bemerkt, daß die beiden Bedingungen (IV_1), (IV_2) eine noch übersichtlichere Gestalt annehmen, wenn man lieber die Summen und Differenzen je entsprechender A und T als die wahren Kerne des Ganzen einführt:

$$(13)\qquad \begin{cases} S = A + T, & S_\lambda = A_\lambda + T_\lambda, & S_\mu = A_\mu + T_\mu, & S_\nu = A_\nu + T_\nu, \\ D = A - T, & D_\lambda = A_\lambda - T_\lambda, & D_\mu = A_\mu - T_\mu, & D_\nu = A_\nu - T_\nu. \end{cases}$$

Denn damit gehen die beiden Bedingungen (IV_1), (IV_2) über in die beiden ihnen gleichwertigen, ganz gleich gebauten:

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{cases} S^2 + S_\lambda^2 + S_\mu^2 + S_\nu^2 = 1, \\ D^2 + D_\lambda^2 + D_\mu^2 + D_\nu^2 = 1. \end{cases}$$

Mit anderen Worten, die orthogonalen $B\,(\mathrm{I})$ der R_4 lassen sich durch zwei beliebige, voneinander unabhängige Einheitsquaternionen beherrschen (s. u. Nr. **14**).

8. Mit Hilfe der acht neuen Größen A und T nehmen nunmehr die Verbindungen s_{ik} und d_{ik} in (9) die folgenden einfachen Werte an:

$$(14)\qquad \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{4} s_{\lambda\mu} = A_\lambda A_\mu - T_\lambda T_\mu, \\ \frac{1}{4} d_{\lambda\mu} = A A_\nu - T T_\nu; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} s_{\lambda 4} = -(A_\mu T_\nu - A_\nu T_\mu), \\ \frac{1}{4} d_{4\lambda} = A T_\lambda - A_\lambda T. \end{cases} \end{cases} \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ zyklisch} = 1, 2, 3).$$

Hieraus ergeben sich sofort durch jeweilige Addition und Subtraktion die entsprechenden a_{ik} $(i \neq k = 1, 2, 3, 4)$. Andererseits gelangt man zu den vier Diagonalelementen a_{ii} durch geeignete lineare Kombinierung der Quadrate der A und T, auf Grund von (10) und (11).

So entsteht das (reelle) Schema der a in (I). Man hat nach Typen geordnet:

$$\text{I}') \quad \begin{cases} \begin{cases} a_{\lambda\lambda} = -(T^2 + T_\lambda^2) + (T_\mu^2 + T_\nu^2) \\ \qquad\quad + (A^2 + A_\lambda^2) - (A_\mu^2 + A_\nu^2), \\ a_{44} = -(T^2 + T_\lambda^2 + T_\mu^2 + T_\nu^2) \\ \qquad\quad + (A^2 + A_\lambda^2 + A_\mu^2 + A_\nu^2); \end{cases} & (\lambda = \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3), \\ \begin{cases} \frac{1}{2} a_{\lambda\mu} = (A_\lambda A_\mu - T_\lambda T_\mu) - (A A_\nu - T T_\nu), \\ \frac{1}{2} a_{\mu\lambda} = (A_\lambda A_\mu - T_\lambda T_\mu) + (A A_\nu - T T_\nu), \end{cases} & (\lambda, \mu, \nu \text{ zykl.} = 1, 2, 3); \\ \begin{cases} \frac{1}{2} a_{\lambda 4} = -(A_\mu T_\nu - A_\nu T_\mu) - (A T_\lambda - A_\lambda T), \\ \frac{1}{2} a_{4\lambda} = -(A_\mu T_\nu - A_\nu T_\mu) + (A T_\lambda - A_\lambda T). \end{cases} \end{cases}$$

Ersichtlich ist diese Darstellung eine Verallgemeinerung derjenigen für eine orthogonale B (III) des R_3; in der Tat entsteht die letztere aus (I′) durch die Spezialisierung $T = T_\lambda = T_\mu = T_\nu = 0$, während die verbleibenden $A_\lambda, A_\mu, A_\nu, A$ die Komponenten der zugehörigen Quaternion werden.

Endlich bilde man noch die Summe σ der vier Diagonalkoeffizienten a_{ii}. Man erhält einfach:

$$15) \qquad \frac{1}{4}\sigma = A^2 - T^2.$$

In dem speziellen Falle $A = 1$, während alle übrigen sieben Parameter den Wert Null annehmen, reduziert sich (15) auf $\sigma = 4$. Das ist aber der Fall der identischen Substitution (I).

Das Schema (I′) der a läßt sich noch übersichtlicher gestalten, wenn man an Stelle der $A, A_\lambda, \ldots; T, T_\lambda, \ldots$ die Größen $S, S_\lambda, \ldots; D, D_\lambda, \ldots$ aus (13) einführt. Man setze zur Abkürzung:

$$15') \qquad \begin{cases} \sigma = a_{\lambda\lambda} + a_{\mu\mu} + a_{\nu\nu} + a_{44}, \\ \sigma_\nu = -(a_{\lambda\lambda} + a_{\mu\mu}) + (a_{\nu\nu} + a_{44}) \end{cases} \qquad (\nu = \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3).$$

Dann ergeben sich für die s_{ik} und d_{ik} (14) die Werte:

$$14') \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} s_{\lambda\mu} = S_\lambda D_\mu + S_\mu D_\lambda, \\ \frac{1}{2} s_{\nu 4} = S_\lambda D_\mu - S_\mu D_\lambda, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} d_{\lambda\mu} = S D_\nu + D S_\nu, \\ \frac{1}{2} d_{\nu 4} = -S D_\nu + D S_\nu. \end{cases}$$

Damit geht das Schema (I′) über in das folgende (λ, μ, ν zyklisch $= 1, 2, 3$ zu nehmen):

$$(\mathrm{I}'')\quad \begin{cases} \begin{cases} a_{\lambda\lambda} = SD + S_\lambda D_\lambda - S_\mu D_\mu - S_\nu D_\nu, \\ a_{44} = SD + S_\lambda D_\lambda + S_\mu D_\mu + S_\nu D_\nu; \end{cases} \\ \begin{cases} a_{\lambda\mu} = (S_\lambda D_\mu + S_\mu D_\lambda) - (SD_\nu + DS_\nu), \\ a_{\mu\lambda} = (S_\lambda D_\mu + S_\mu D_\lambda) + (SD_\nu + DS_\nu); \end{cases} \\ \begin{cases} a_{\lambda 4} = (S_\mu D_\nu - S_\nu D_\mu) + (SD_\lambda - DS_\lambda), \\ a_{4\lambda} = (S_\mu D_\nu - S_\nu D_\mu) - (SD_\lambda - DS_\lambda). \end{cases} \end{cases}$$

9. Umgekehrt denke man sich jetzt die Koeffizienten a in (I), unter Berücksichtigung der zwischen ihnen bestehenden Orthogonalitätsrelationen vorgegeben; die acht neuen Parameter A und T, resp. S und D, sollen durch die a ausgedrückt werden. Auf Grund von (10) bestätigt man die Richtigkeit der folgenden Beziehungen:

$$(16\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} a_{11}A_\lambda + a_{12}A_\mu + a_{13}A_\nu + a_{14}T = A_\lambda, \\ a_{21}A_\lambda + a_{22}A_\mu + a_{23}A_\nu + a_{24}T = A_\mu, \\ a_{31}A_\lambda + a_{32}A_\mu + a_{33}A_\nu + a_{34}T = A_\nu, \\ a_{41}A_\lambda + a_{42}A_\mu + a_{43}A_\nu + a_{44}T = -T; \end{cases}$$

$$(16\,\mathrm{b})\quad \begin{cases} a_{11}T_\lambda + a_{12}T_\mu + a_{13}T_\nu + a_{14}A = -T_\lambda, \\ a_{21}T_\lambda + a_{22}T_\mu + a_{23}T_\nu + a_{24}A = -T_\mu, \\ a_{31}T_\lambda + a_{32}T_\mu + a_{33}T_\nu + a_{34}A = -T_\nu, \\ a_{41}T_\lambda + a_{42}T_\mu + a_{43}T_\nu + a_{44}A = A. \end{cases}$$

Geometrisch bedeuten diese Relationen, daß vermöge (I) der Punkt $(x, y, z, q) = (A_\lambda, A_\mu, A_\nu, T)$ in den Punkt $(x', y', z', q') = (A_\lambda, A_\mu, A_\nu, -T)$ übergeht und entsprechend der Punkt $(x, y, z, q) = (T_\lambda, T_\mu, T_\nu, A)$ in den Punkt $(x', y', z', q') = (-T_\lambda, -T_\mu, -T_\nu, A)$.

Läßt man zunächst jeweils die vierte Relation in (16a) und (16b) fort, so ergibt sich durch Auflösung je der drei ersten, daß die $A_\lambda, A_\mu, A_\nu, T$ resp. $T_\lambda, T_\mu, T_\nu, A$ je den Determinanten einer Matrix proportional sind, oder, kurz geschrieben, für ϱ und σ als zwei Proportionalitätsfaktoren:

$$(17\,\mathrm{a})\quad \varrho A_\lambda, \varrho A_\mu, \varrho A_\nu, \varrho T = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$(17\,\mathrm{b})\quad \sigma T_\lambda, \sigma T_\mu, \sigma T_\nu, \sigma A = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+1 & a_{34} \end{vmatrix}$$

Zieht man jetzt noch je die vierte Relation (16a), (16b) heran, so hat man für ϱ und σ die Werte:

(18) $$\varrho = -8T, \quad \sigma = 8A.$$

Damit ergeben sich T und A als zwei Quadratwurzeln aus den Formeln:

(19a) $$-8T^2 = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 \end{vmatrix}$$

(19b) $$8A^2 = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+1 \end{vmatrix}$$

Das Vorzeichen irgendeiner der beiden Quadratwurzeln für T und A läßt sich wiederum willkürlich festsetzen; dann ist aber das andere mit Rücksicht auf die Relation (IV_2) eindeutig bestimmt.

Zugleich erkennt man, daß für die Bewegungen B (I) ein reeller Fixpunkt im allgemeinen nicht existiert; für das Bestehen eines solchen ist notwendig und hinreichend, daß T verschwindet, was zu einer ausgezeichneten Untergruppe von (I) führt.

Wiederum gestaltet sich die Lösung der obigen Umkehrungsaufgabe erheblich einfacher bei Einführung der Größen $S, S_\lambda, \ldots; D, D_\lambda, \ldots$ (14). Aus den Darstellungen (14′) und (I″) der Nr. 8 gehen sofort die folgenden hervor (λ, μ, ν zyklisch $= 1, 2, 3$):

(14″)
$$\begin{cases} 4SD = \sigma, & 4S_\lambda D_\lambda = \sigma_\lambda, \ldots, \\ 4S_\lambda D_\mu = s_{\lambda\mu} + s_{\nu 4}, & 4S_\mu D_\lambda = s_{\lambda\mu} - s_{\nu 4}, \\ 4SD_\lambda = d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4}, & 4DS_\lambda = d_{\mu\nu} + d_{\lambda 4}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich etwa S, indem man die Ausdrücke für $4SD$, $4SD_\lambda$, $4SD_\mu$, $4SD_\nu$ quadriert und addiert unter Benützung von (IV_2):

(19′) $$(4S)^2 = \sigma^2 + (d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4})^2 + (d_{\nu\lambda} - d_{\mu 4})^2 + (d_{\lambda\mu} - d_{\nu 4})^2.$$

Das Vorzeichen der so hervorgehenden Quadratwurzel für $4S$, die einfach mit V bezeichnet werde, kann nach früherem beliebig, aber fest gewählt werden. Abgesehen von diesem irrationalen Faktor erscheinen dann die übrigen sieben Parameter als ganze resp. gebrochene *lineare* Ausdrücke in den a, wie folgt (λ, μ, ν zyklisch $= 1, 2, 3$):

(20′)
$$\begin{cases} DV = \sigma, \quad D_\lambda \cdot V = d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4}, \quad D_\mu \cdot V = d_{\nu\lambda} - d_{\mu 4}, \quad D_\nu \cdot V = d_{\lambda\mu} - d_{\nu 4}, \\ \dfrac{4S_\lambda}{V} = \dfrac{d_{\mu\nu} + d_{\lambda 4}}{d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4}} = \dfrac{\sigma_\lambda}{d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4}} = \dfrac{s_{\lambda\mu} + s_{\nu 4}}{d_{\nu\lambda} - d_{\mu 4}} = \dfrac{s_{\nu\lambda} - s_{\mu 4}}{d_{\lambda\mu} - d_{\nu 4}}. \end{cases}$$

10. Wie bei den Euklidischen B des R_3, erscheint die reelle Darstellung (I′) resp. (II″) der a noch nicht als die einfachste. Man wird vielmehr geeignete komplexe Verbindungen der x, y, z, q resp. x', y', z', q' als neue Veränderliche einführen. Wir setzen also etwa:

$$(20) \qquad \begin{cases} \zeta = x + iy, & \eta = p + iq, \\ \bar{\zeta} = x - iy, & \bar{\eta} = p - iq, \end{cases}$$

und entsprechend für $\zeta', \bar{\zeta}', \eta', \bar{\eta}'$.

Umgekehrt hat man dann:

$$(20') \qquad \begin{aligned} 2x &= \zeta + \bar{\zeta}, & 2p &= \eta + \bar{\eta}, \\ 2y &= -i(\zeta - \bar{\zeta}), & 2q &= -i(\eta - \bar{\eta}). \end{aligned}$$

Damit nimmt zunächst $2\zeta' = 2(x' + iy')$ in (I) die Gestalt an:

$$(21) \qquad \begin{aligned} 2\zeta' = {} & \zeta\{(a_{11} + ia_{21}) - i(a_{12} + ia_{22})\} \\ & + \bar{\zeta}\{(a_{11} + ia_{21}) + i(a_{12} + ia_{22})\} \\ & + \eta\{(a_{13} + ia_{23}) - i(a_{14} + ia_{24})\} \\ & + \bar{\eta}\{(a_{13} + ia_{23}) + i(a_{14} + ia_{24})\}, \end{aligned}$$

wo rechts die Werte der a aus (I′) resp. (II″) einzutragen sind. Die Ausführung der Rechnung zeigt, daß sich alles durch nur vier komplexe Verbindungen der acht neuen Parameter A, T resp. S, D ausdrücken läßt, nämlich mit Rücksicht auf (13), wie folgt:

$$(22) \qquad \begin{cases} \sigma_{0\nu} = (A + T) + i(A_\nu + T_\nu) = S + i S_\nu \\ \delta_{0\nu} = (A - T) + i(A_\nu - T_\nu) = D + i D_\nu \\ \sigma_{\lambda\mu} = (A_\lambda + T_\lambda) + i(A_\mu + T_\mu) = S_\lambda + i S_\mu \\ \delta_{\lambda\mu} = (A_\lambda - T_\lambda) + i(A_\mu + T_\mu) = D_\lambda + i D_\mu. \end{cases}$$

Damit kommt an Stelle von (21) einfach:

$$(\mathrm{I}_\zeta) \qquad \zeta' = \zeta\,\sigma_{0\nu}\,\delta_{0\nu} + \bar{\zeta}\,\sigma_{\lambda\mu}\,\delta_{\lambda\mu} - i\eta\,\sigma_{\lambda\mu}\,\delta_{0\nu} - i\bar{\eta}\,\sigma_{0\nu}\,\delta_{\lambda\mu},$$

woraus die entsprechende Darstellung für die konjugiert-komplexe Veränderliche $\bar{\zeta} = x' - iy'$ ohne weiteres abzulesen ist.

Analog ergibt sich für η':

$$(\mathrm{I}_\eta) \qquad \eta' = -i\zeta\,\sigma_{0\nu}\,\bar{\delta}_{\lambda\mu} + i\bar{\zeta}\,\sigma_{\lambda\mu}\,\bar{\delta}_{0\nu} + \eta\,\sigma_{0\nu}\,\bar{\delta}_{0\nu} - \bar{\eta}\,\sigma_{\lambda\mu}\,\bar{\delta}_{\lambda\mu}.$$

11. Nun waren die B (I) des R_4 definiert als die unimodularen Kollineationen, die den Minimalüberkegel K:

$$(2) \qquad K \equiv x^2 + y^2 + z^2 + q^2 = 0$$

in sich überführen. Indem man auch hier die neuen Veränderlichen (20) einführt, nimmt (2) die Gestalt an:

$$(2) \qquad K \equiv \zeta\bar{\zeta} + \eta\bar{\eta} = 0.$$

Statt dieser impliziten Darstellung von K lege man lieber eine gleichwertige explizite zugrunde, mit Hilfe zweier homogener binärer Parameterpaare $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2$:

$$\begin{cases} \zeta = \lambda_1 \mu_1, & \eta = \lambda_1 \mu_2, \\ -\bar{\xi} = \lambda_2 \mu_2, & \bar{\eta} = \lambda_2 \mu_1, \end{cases} \tag{23}$$

nebst den transformierten Parametern $\lambda_1', \lambda_2'; \mu_1', \mu_2'$.

Dann reduzieren sich *auf* dem Kegel K die Substitutionen $(I_\zeta), (I_\eta)$ auf:

$$\begin{cases} \lambda_1 \mu_1' = (\ \lambda_1 \sigma_{0\nu} - i\lambda_2 \sigma_{\lambda\mu})(\ \mu_1 \delta_{0\nu} - i\mu_2 \delta_{\lambda\mu}), \\ -\lambda' \mu_2' = (-\lambda_1 \sigma_{0\nu} + i\lambda_2 \sigma_{\lambda\mu})(i\mu_1 \bar{\delta}_{\lambda\mu} - \ \mu_2 \bar{\delta}_{0\nu}), \end{cases} \tag{24}$$

und entsprechend die Darstellungen für ξ' und $\bar{\eta}'$ auf:

$$\begin{cases} -\lambda_2' \mu_2' = (\ \ \lambda_1 \bar{\sigma}_{\lambda\mu} + i\lambda_2 \bar{\sigma}_{\sigma\nu})(\mu_1 \bar{\delta}_{\lambda\mu} + i\mu_2 \bar{\delta}_{\sigma\nu}), \\ \lambda_2' \mu_1' = (-i\lambda_1 \bar{\sigma}_{\lambda\mu} + \ \lambda_2 \sigma_{0\nu})(\mu_1 \delta_{0\nu} - i\mu_2 \delta_{\lambda\mu}). \end{cases} \tag{24}$$

Somit induziert die Bewegung (I) des R_4 auf K zwei binäre Substitutionen der $\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2$, die bezeichnet seien mit:

$$\begin{cases} \lambda_1' = \alpha_\lambda \lambda_1 + \beta_\lambda \lambda_2, \\ \lambda_2' = \gamma_\lambda \lambda_1 + \delta_\lambda \lambda_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_1' = \alpha_\mu \mu_1 + \beta_\mu \mu_2, \\ \mu_2' = \gamma_\mu \mu_1 + \delta_\mu \mu_2. \end{cases} \tag{25}$$

Auf Grund von (24) erhalten, wenn ε und η zwei unbekannte Proportionalitätsfaktoren bedeuten, die Koeffizienten in (25) die Werte:

$$\begin{cases} \begin{cases} \alpha_\lambda = \ \ \varepsilon \sigma_{0\nu}, & \beta_\lambda = -i\varepsilon \sigma_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\lambda = -\eta \bar{\sigma}_{\lambda\mu}, & \delta_\lambda = -i\eta \bar{\sigma}_{0\nu}; \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_\mu = \dfrac{1}{\varepsilon} \delta_{0\nu}, & \beta_\mu = -\dfrac{i}{\varepsilon} \delta_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\mu = \dfrac{1}{\eta} \bar{\delta}_{\lambda\mu}, & \delta_\mu = \ \ \dfrac{i}{\eta} \bar{\delta}_{0\nu}. \end{cases} \end{cases} \tag{26}$$

Die beiden Substitutionen (25) mögen dahin normiert werden, daß ihre Determinanten je den Wert Eins annehmen. Das liefert als gemeinsame Bedingung $\varepsilon\eta = i$. Nach Entfernung von η geht (26) über in:

$$\begin{cases} \begin{cases} \alpha_\lambda = \ \ \varepsilon \sigma_{0\nu}, & \beta_\lambda = -i\varepsilon \sigma_{\lambda\mu} \\ \gamma_\lambda = -\dfrac{i}{\varepsilon} \bar{\sigma}_{\lambda\mu}, & \delta_\lambda = \ \ \dfrac{1}{\varepsilon} \sigma_{0\nu}; \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_\mu = \ \ \dfrac{1}{\varepsilon} \delta_{0\nu}, & \beta_\mu = -\dfrac{i}{\varepsilon} \delta_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\mu = -i\varepsilon \bar{\delta}_{\lambda\mu}, & \delta_\mu = \ \ \varepsilon \bar{\delta}_{0\nu}. \end{cases} \end{cases} \tag{26'}$$

Nunmehr ziehe man auch die erste der Darstellungen $(\overline{24})$ heran. Bedeutet ϱ wieder einen unbekannten Proportionalitätsfaktor, so ergibt sich für $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\mu, \delta_\mu$ die zweite Reihe von Werten:

$$(27)\qquad \begin{cases} \alpha_\lambda = -\varrho\sigma_{0\nu}, & \beta_\lambda = \quad i\varrho\sigma_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\mu = \dfrac{i}{\varrho}\delta_{\lambda\mu}, & \delta_\mu = -\dfrac{i}{\varrho}\delta_{0\nu}. \end{cases}$$

Die Vergleichung mit (26′) lehrt, daß ε und ϱ an die Bedingunge gebunden sind:

$$(28)\qquad \varepsilon = -\varrho, \quad \varrho^2 = 1, \quad \text{also:} \quad \varrho = \mp 1, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Indem man, wie es nach früherem erlaubt ist, den Wert von ε zu $+$ normiert, und damit den von ϱ zu -1, erhalten die Koeffizienten de Substitutionen (25) die endgültigen Werte:

$$(V_\lambda)\qquad \begin{cases} \alpha_\lambda = \quad \sigma_{0\nu}, & \beta_\lambda = -i\sigma_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\lambda = -i\sigma_{\lambda\mu}, & \delta_\lambda = \quad \bar{\sigma}_{0\nu}; \end{cases}$$

$$(V_\mu)\qquad \begin{cases} \alpha_\mu = \quad \delta_{0\nu}, & \beta_\mu = -i\delta_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\mu = -i\bar{\delta}_{\lambda\mu}, & \delta_\mu = \quad \bar{\delta}_{0\nu}, \end{cases}$$

wo nach (22):

$$(22)\quad \sigma_{0\nu} = S + iS_\nu, \quad \delta_{0\nu} = D + iD_\nu, \quad \sigma_{\lambda\mu} = S_\lambda + iS_{\mu\nu}, \quad \delta_{\lambda\mu} = D_\lambda + iD_{\mu\nu}$$

Man beachte, daß die rechten Seiten von (V_λ) in die von (V_μ) einfac dadurch übergeht, daß man den Buchstaben σ mit δ, d. i. die S, S_λ, S_μ, S mit den $D, D_\lambda, D_\mu, D_\nu$ vertauscht.

Vermöge der zweiten der Darstellungsformeln ($\overline{24}$) erhalten (V_λ) und $(V_\mu$ ihre Bestätigung.

Es läßt sich daher der Satz aussprechen:

„Auf Grund von (V) ist für die Bewegungen B (I) des R_4 eine wesent liche Reduktion gewonnen, insofern jeder quaternären Substitution (I) ei Paar von binären Substitutionen (V) eindeutig zugeordnet wird."

12. Damit ist das Problem der Zusammensetzung zweier Bewegunge B, B' (I) zu einer dritten B'' auf das sehr viel einfachere der gleichzeitige Zusammensetzung zweier binärer Substitutionenpaare (V) zurückgeführt insofern die letzteren lauten:

$$(29)\qquad \begin{cases} \alpha_\lambda'' = \alpha_\lambda\alpha_\lambda' + \gamma_\lambda\beta_\lambda', & \beta_\lambda'' = \beta_\lambda\alpha_\lambda + \delta_\lambda\beta_\lambda', \\ \gamma_\lambda'' = \alpha_\lambda\gamma_\lambda + \gamma_\lambda\delta_\lambda', & \delta_\lambda'' = \beta_\lambda\gamma_\lambda' + \delta_\lambda\delta_\lambda', \end{cases}$$

nebst den analogen für den Index μ, wo gemäß (V) die Werte der keinmal ein- und zweimal akzentuierten Koeffizienten einzutragen sind.

Trennt man sodann jeweils Reelles vom Imaginären, so gelang man direkt zu den gesuchten Zusammensetzungsformeln für di Bewegungen B (I)

Bedient man sich dabei noch, wenn A, B, A', B' irgend zwei Größen paare bedeuten, der Abkürzungen:

$$(30)\qquad [AB] = AB' + BA' \qquad (AB) = AB' - BA'$$

o lautet, wenn die Indizes λ, μ, ν zyklisch die Werte 1, 2, 3 durchlaufen, ie Zusammensetzungstabelle:

$$\text{VI)} \quad \begin{cases} A'' = (AA' + TT') - \sum A_\lambda A'_\lambda - \sum T_\lambda T'_\lambda, \\ T'' = [AT] - \sum_\lambda [A_\lambda T_\lambda], \\ A''_\lambda = [AA_\lambda] + [TT_\lambda] - (A_\mu A_\nu) - (T_\mu T_\nu), \\ T''_\lambda = [AT_\lambda] + [TA_\lambda] - (A_\mu T_\nu) - (T_\mu A_\nu). \end{cases}$$

13. Die Formeln (VI) lassen sich aber auch, wie bekanntermaßen hre Analoga im R_3, mittels gewöhnlicher Einheitsquaternionen, in ein inziges symbolisches Multiplikationsgesetz für Cliffordsche Biquaternionen usammenziehen. Bedeuten $r, s, i_\lambda, k_\lambda$ $(\lambda = \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$ Grundeinheiten, so bilde man die Biquaternion:

$$31) \qquad q = rA + sT + \sum_\lambda i_\lambda A_\lambda + \sum_\lambda k_\lambda T_\lambda.$$

Sind dann q', q'' zwei entsprechende Bildungen, und führt man die Multiplikation $q'' = qq'$ arithmetisch von links nach rechts aus, und legt en Satz zugrunde, daß zwei Biquaternionen dann und nur dann gleich ind, wenn ihre acht Komponenten je übereinstimmen, so decken sich die Formeln (VI) mit $q'' = qq'$, falls die Grundeinheiten den folgenden Multiplikationsregeln unterworfen werden:

$$32) \quad \begin{cases} r = rr = ss = -i_\lambda i_\lambda = -k_\lambda k_\lambda = \ldots, \\ s = rs = sr = -i_\lambda k_\lambda = -k_\lambda i_\lambda = \ldots, \\ i_\lambda = ri_\lambda = i_\lambda r = sk_\lambda = k_\lambda s = -i_\mu i_\nu = +i_\nu i_\mu = -k_\mu k_\nu = +k_\nu k_\mu, \\ k_\lambda = si_\lambda = i_\lambda s = rk_\lambda = k_\lambda r = -i_\mu k_\nu = +k_\nu i_\mu = -k_\mu i_\nu = +i_\nu k_\mu. \end{cases}$$

Hier spielen die r, s die Rolle reeller Einheiten, und die i_λ, k_λ die von verallgemeinerten Vektor-Grundeinheiten.

In diesem Sinne gilt der Satz:

„Die Zusammensetzung von zwei Bewegungen (I) des R_4, resp. von zwei elliptischen Bewegungen des R_3 (3) lassen sich durch das eine Gesetz:

$$\text{VI')} \qquad q'' = qq'$$

usammenfassen."

14. Indessen ist das Gesetz (VI) resp. (VI') noch nicht das zweckmäßigste für die Behandlung weiterer Teilaufgaben. Zu dem Behuf wird man vielmehr wieder auf die in (13) eingeführten Größen $S, S_\lambda; T, T_\lambda$ $(\lambda = \lambda, \mu, \nu)$ urückgehen, die den beiden gleichgebauten Bedingungen unterlagen:

$$\text{IV)} \quad \begin{cases} S_\lambda^2 + S_\mu^2 + S_\nu^2 + S^2 = 1, \\ D_\lambda^2 + D_\mu^2 + D_\nu^2 + D^2 = 1. \end{cases}$$

Indem man sowohl die $S_\lambda, \ldots, S$, wie die $D_\lambda, \ldots, D$ als Kompo nenten je einer gewöhnlichen Einheitsquaternion q_s, q_d auffaßt, mach man an Stelle von (IV) den expliziten Doppelansatz:

$$(\text{VII}) \quad \begin{cases} S_\lambda = \lambda_\varepsilon \sin\frac{\varepsilon}{2}, \quad S_\mu = \mu_\varepsilon \sin\frac{\varepsilon}{2}, \quad S_\nu = \nu_\varepsilon \sin\frac{\varepsilon}{2}, \quad S = \cos\frac{\varepsilon}{2} \quad (\lambda_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 + \nu_\varepsilon^2 = \\ D_\lambda = \lambda_\eta \sin\frac{\eta}{2}, \quad D_\mu = \mu_\eta \sin\frac{\eta}{2}, \quad D_\nu = \nu_\eta \sin\frac{\eta}{2}, \quad D = \cos\frac{\eta}{2} \quad (\lambda_\eta^2 + \mu_\eta^2 + \nu_\eta^2 = \end{cases}$$

Diese Darstellungen gestatten eine doppelte geometrische Deutung.

Einmal fasse man die $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon$ $(\pi_\varepsilon = 0)$, $\lambda_\eta, \mu_\eta, \nu_\eta$ $(\pi_\eta = 0)$ als di Richtungskosinus zweier von O ausgehender, im R_3 $(q = 0)$ gelegener, odd auch zweier von O_1 ausgehender, im R_3 (3) $(q = 1)$ gelegener Geraden d, auf. Dann denke man sich zwei mit R_3 identische Räume, so hat ma vermöge (VII) in je einem derselben eine gewöhnliche Drehung um di Achse d resp. e, durch den Drehwinkel ε resp. η.

Die einfachste Übersicht über alle hier in Frage kommenden Ab hängigkeiten bei der Zusammensetzung zweier Bewegungen B, B' im R zu einer dritten B'' bietet sich bekanntlich dar mit Hilfe zweier sphärische Dreiecke Δ_ε, Δ_η auf der Einheitskugel. Im Dreieck Δ_ε haben die Seiten di Werte $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon''}{2}$, dagegen die Winkel die Werte $(d'd'')$, (dd''), $(2R - (dd'))$ und entsprechend in Δ_η. Überdies ist zu beachten, daß die Richtunge der Drehachsen d, d', d'' in diejenigen der Kanten des geeignet normierte Polardreikants von Δ_ε fallen, und entsprechend für Δ_η. Das Ergebn werde in dem Satze ausgedrückt:

„Die Darstellungen (VII) lassen sich realisieren durch Superpositio zweier gewöhnlicher Drehungen in einem R_3."

15. Andererseits operiere man zum Zwecke einer direkten Deutun von (VII) im R_4. Man wähle das ursprüngliche Koordinatensyste (x, y, z, q) speziell so, daß die Bedingungen

$$(33) \qquad S_\lambda = 0, \; S_\mu = 0; \qquad D_\lambda = 0, \; D_\mu = 0;$$

oder auch $\lambda_\varepsilon = 0$, $\mu_\varepsilon = 0$, $\nu_\varepsilon = 1$; $\lambda_\eta = 0$, $\mu_\eta = 0$, $\nu_\eta = 1$ erfüllt sind Damit nimmt (I) auf Grund von (I′) resp. (I″) die kanonische Gestalt an

$$(34) \quad \begin{cases} \begin{cases} x' = x\cos\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2}\right) - y\sin\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2}\right), \\ y' = x\sin\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2}\right) + y\cos\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2}\right); \end{cases} \\ \begin{cases} z' = z\cos\left(\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right) - q\sin\left(\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right), \\ q' = z\sin\left(\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right) + q\cos\left(\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right). \end{cases} \end{cases}$$

Setzt man daher:

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta = \frac{\varepsilon+\eta}{2}, & \delta' = \frac{\varepsilon-\eta}{2}, \\ \varepsilon = \delta+\delta', & \eta = \delta-\delta', \end{array}\right. \tag{5}$$

stellen die Gleichungen (34) zwei voneinander unabhängige positive rehungen des R_4 um die (zueinander senkrechten) Ebenen $(x\,y)$ und $(z\,q)$ rch die Drehwinkel δ, δ' dar. Somit gilt der Satz:

„Auf Grund von (VII) ist eine Bewegung (I) des R_4 gleichwertig it der gleichzeitigen Ausführung zweier voneinander unabhängiger rehungen des R_4 um zwei zueinander senkrechte durch O gehende benen E, E' durch zwei Drehwinkel δ, δ'."

Es bleibt nur die Aufgabe, bei vorgegebenen Koeffizienten a die Lage eser beiden Drehebenen, die zugleich die einzigen reellen Fixebenen der ewegung sind, zu bestimmen.

16. Um die beiden Fixebenen E, E' — die sich im R_3 (3) als zwei erade e, e', die in bezug auf die nullteilige Einheitskugel K_1 (2_1) reziroke Polaren sind, darstellen — zu ermitteln, bestimme man vorab die ixelemente $\omega_\lambda, \omega_\lambda'$; ω_μ, ω_μ' der beiden, jetzt nichthomogen in l, l'; m, m' schreibenden Substitutionen (25), d. s. die Wurzeln der beiden quaratischen Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} l^2\gamma_\lambda - l(\alpha_\lambda - \delta_\lambda) - \beta_\lambda = 0, & (\omega_\lambda, \omega_\lambda'), \\ m^2\gamma_\mu - m(\alpha_\mu - \delta_\mu) - \beta_\mu = 0, & (\omega_\mu, \omega_\mu'). \end{array}\right. \tag{36}$$

Trägt man hier die Werte der Koeffizienten $\alpha_\lambda, \ldots, \alpha_\mu, \ldots$ aus (V) n und benützt sodann die explizite Darstellung (VII), so führt eine nfache Rechnung zu den Werten[2]):

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_\lambda = \frac{\lambda_\varepsilon + i\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon + 1}, & \omega_\lambda' = \frac{\lambda_\varepsilon + i\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon - 1}; \\ \omega_\mu = \frac{\lambda_\eta + i\mu_\varepsilon}{\nu_\eta + 1}, & \omega_\mu' = \frac{\lambda_\eta + i\mu_\eta}{\nu_\eta - 1}. \end{array}\right. \tag{37}$$

ie nullteilige Einheitskugel K_1 (2_1) ist mit zwei konjugiert imaginären charen von Geraden $l = \text{konst.}$, $m = \text{konst.}$ überdeckt; jeder Punkt von K

[2]) Führt man in (25) die Doppelelemente (37) ein, so ergibt sich, ähnlich wie R_3:

$$\frac{l'-\omega_\lambda}{l'-\omega_\lambda'} = e^{i\varepsilon}\frac{l-\omega_\lambda}{l-\omega_\lambda'}, \qquad \frac{m'-\omega_\mu}{m'-\omega_\mu'} = e^{i\eta}\frac{m-\omega_\mu}{m-\omega_\mu'}.$$

Schreibt man hier wieder homogen und unimodular. und führt wieder gemäß 3) die ξ, η, ξ', η' nebst ihren konjugierten ein, so gelangt man unmittelbar zur lgemeinen invarianten Darstellung der Bewegungen (I), die für den kanonischen all in (34) vorliegt.

erscheint als ein Treffpunkt (l, m). Somit führt (37) zu den beid Paaren konjugiert-imaginärer Fixpunkte:

$$(38)\qquad \begin{cases} (\omega_\lambda, \omega_\mu) \text{ und } (\omega'_\lambda, \omega'_\mu), \\ (\omega_\lambda, \omega'_\mu) \text{ und } (\omega'_\lambda, \omega_\mu), \end{cases}$$

deren Verbindungsgeraden reell sind, und mit O verbunden, für (I) d beiden Fixebenen E, E' des R_4 liefern. Es genügt, etwa die erstere untersuchen, wobei es bequemer erscheint, die Projektionsgerade e im (3) zugrunde zu legen; der Index ε werde jetzt der Kürze halber unte drückt, der Index η durch einen Akzent ersetzt, und vorübergehend gese

$$(39)\qquad \nu_1 = \nu + 1, \qquad \nu'_1 = \nu' + 1.$$

Wählt man dann statt der konjugiert-imaginären Grundpunkte d ersten Paares von (38) lieber deren reelle Komponentpunkte, so erschei die erste Fixgerade e im R_3 (3) bestimmt durch das folgende Schem der Koordinaten der beiden reellen Punkte:

$$(40)\qquad \begin{cases} \overbrace{(\lambda\lambda' - \mu\mu')}^{x} - \nu_1\nu'_1, & \overbrace{\lambda\mu' + \lambda'\mu}^{y}, & \overbrace{\lambda'\nu_1 + \lambda\nu'_1}^{z}, & \overbrace{\mu\nu'_1 - \mu'}^{q} \\ \lambda\mu' + \lambda'\mu, & -\{(\lambda\lambda' - \mu\mu') + \nu_1\nu'_1\}, & \mu\nu'_1 + \mu'\nu_1, & \lambda'\nu_1 - \lambda \end{cases}$$

Hieraus lassen sich sofort die homogenen Strahlenkoordinaten wo $p_{ik} = (xy)$, $p_{lm} = (zq)$, usf., berechnen. Läßt man den gemeinsame Faktor $\nu_1\,\nu'_1$ fort, der sein Auftreten der Bevorzugung der z-Koordina in (2′) verdankt, so gelangt man zu den einfachen Werten für die p_{i}

$$(41)\qquad \begin{cases} p_{ik} = \nu + \nu', & p_{il} = -(\mu + \mu'), & p_{im} = \lambda - \lambda', \\ p_{lm} = \nu - \nu', & p_{mk} = -(\mu - \mu'), & p_{kl} = \lambda + \lambda'. \end{cases}$$

Hiermit ergeben sich die komplementären Achsenkoordinate $\pi_{ik} = p_{lm}$ usf. von selbst:

$$(41')\qquad \begin{cases} \pi_{ik} = \nu - \nu', & \pi_{il} = -(\mu - \mu'), & \pi_{im} = \lambda + \lambda', \\ \pi_{lm} = \nu + \nu', & \pi_{mk} = -(\mu + \mu'), & \pi_{kl} = \lambda - \lambda'. \end{cases}$$

Man beachte, wie die bekannte Relation zwischen den p_{ik} resp. π ohne weiteres erfüllt ist:

$$(42)\qquad \begin{aligned} &p_{ik}p_{lm} + p_{il}p_{mk} + p_{im}p_{kl} \\ &\equiv (\lambda^2 - \lambda'^2) + (\mu^2 - \mu'^2) + (\nu^2 - \nu'^2) \equiv 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

und entsprechend die Bedingung für das Konjugiertsein der Geraden e, bezüglich K_1 (2_1): $\sum p_{ik}\,\pi_{ik} = 0$, deren linke Seite das Doppelte de linken Seite von (42) ausmacht. Aus der ersten Fixgeraden e geht di zweite, e', einfach dadurch hervor, daß man die p_{ik} mit den gleichbe zeichneten π_{ik} vertauscht.

Die Gesetzmäßigkeit der Formeln (41) tritt noch deutlicher hervor, enn man die rechtwinkligen homogenen Koordinaten der vier Schnittnkte Q_i von e mit den Ebenen des Koordinatentetraeders T im R_3 (3) — ssen vierte Ebene die unendlich ferne ist — resp. der vier Verbindungsenen E_i mit den Ecken von T je zu einem Schema vereinigt. Man t dann:

$$(Q_i)\begin{cases} 0, & \nu+\nu', & -(\mu+\mu'), & \lambda-\lambda', \\ -(\nu+\nu'), & 0, & \lambda+\lambda', & \mu-\mu', \\ \mu+\mu', & -(\lambda+\lambda'), & 0, & \nu-\nu', \\ \lambda-\lambda', & \mu-\mu', & \nu-\nu', & 0; \end{cases} \tag{43}$$

$$(E_i)\begin{cases} 0, & \nu-\nu', & -(\mu-\mu'), & \lambda+\lambda', \\ -(\nu-\nu'), & 0, & \lambda-\lambda', & \mu+\mu', \\ \mu-\mu', & -(\lambda-\lambda'), & 0, & \nu+\nu', \\ \lambda+\lambda', & \mu+\mu' & \nu+\nu', & 0. \end{cases} \tag{43'}$$

Trägt man von O aus auf den Geraden e, e' die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ uf und konstruiert deren Summen- und Differenzvektor, so gestatten die tzteren eine unmittelbare elementare Konstruktion von e und e', und ice versa, was dem Leser überlassen bleibe.

17. Die bisherigen Entwicklungen lassen sich im wesentlichen auch uf den Fall der hyperbolischen R_3-Bewegungen übertragen. Wieder gengt man zur Superposition zweier Quaternionen, die aber jetzt von hyperbolischem" Charakter sind, d. h. deren Komponenten A, B, C, D einer Relation von der Art:

$$C^2+D^2-(A^2+B^2)=1 \tag{36a}$$

enügen.

Um bei der Durchführung die zunächst zum Teil verloren gegangene ymmetrie nach Möglichkeit wieder herzustellen, ist es zweckmäßig, auf ie Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ der Euklidischen R_3-Drehungen zurückgehen. Um diese formal einzuführen, gehe man von den beiden Relaonen $a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1$, $a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1$ aus, und erfülle dieselben ittels dreier Winkel φ, ϑ, ψ, indem man setzt:

$$a_{33}=\cos\vartheta, \quad \begin{cases} a_{13}=\sin\vartheta\sin\psi, & a_{23}=-\sin\vartheta\cos\psi, \\ a_{31}=\sin\vartheta\sin\varphi, & a_{32}=\sin\vartheta\cos\varphi. \end{cases} \tag{44}$$

Damit ergeben sich die vier noch übrigen Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} ndeutig auf Grund der Minorbeziehungen (vgl. Nr. 1, Anm.):

$$a_{11}=a_{11}, \quad a_{12}=a_{12}, \quad a_{21}=a_{21}, \quad a_{22}=a_{22}. \tag{45}$$

Daß die so eingeführten Winkel φ, ϑ, ψ in der Tat die bekannt geometrische Bedeutung der Eulerschen Winkel besitzen, erkennt m leicht durch geeignete Spezialisierungen, indem man etwa einmal $\varphi =$ das andere Mal $\psi = 0$ annimmt.

Analog gehe man bei den hyperbolischen R_2-Bewegungen von d beiden Relationen $a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1$, $a_{31}^2 + a_{32}^2 - a_{33}^2 = -1$ aus u erfülle dieselben mittels dreier Winkel φ, θ, ψ, indem man setzt:

$$(44') \qquad a_{33} = C(\theta), \qquad \begin{cases} a_{13} = S(\theta)\sin\psi, & a_{23} = -S(\theta)\cos\psi, \\ a_{31} = S(\theta)\sin\varphi, & a_{32} = \ \ S(\theta)\cos\varphi, \end{cases}$$

wo S und C den hyperbolischen Sinus resp. Kosinus (mit $C^2 - S^2 =$ bedeuten. Da die Relationen (44) genau so auch für den hyperbolisch Fall gelten, so gehen die Ausdrücke für die a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} des elli tischen Falles sofort in die entsprechenden des hyperbolischen über, inde man überall $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ ersetzt durch $S(\theta)$ und $C(\theta)$. Mittels dies neuen Winkel φ, θ, ψ lassen sich nunmehr leicht die Komponenten $A, B, C,$ der zugehörigen „hyperbolischen" Quaternion ausdrücken. Man erhält:

$$(46) \qquad \begin{cases} D = C\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\varphi+\psi}{2}, & A = S\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\varphi-\psi}{2}, \\ C = C\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\varphi+\psi}{2}, & B = S\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\varphi-\psi}{2}, \end{cases}$$

Auf die genauere Durchführung der erforderlichen Rechnungen g denke ich an anderer Stelle einzugehen.

18. Zum Schlusse werde noch auf die Natur der Gebilde eingegange die im elliptischen R_3 an die Stelle der Kugeln des Euklidischen R_3 trete Zu dem Behuf gehen wir erst einen Schritt rückwärts und betrachten d elliptischen Analoga zu den Kreisen der Euklidischen Ebene E.

Wie in Nr. 1 fange man das Bündel O des Euklidischen R_3 mit d Ebene $E(z=1)$ auf. Der Minimalkegel K: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ projizie sich in den nullteiligen Grundkreis K[3]: $x^2 + y^2 + 1 = 0$, mit O_1 a Mittelpunkt. Die elliptischen Bewegungen B_1 in E sind dann dargestell durch die unimodularen Kollineationen der homogen gemachten Koord naten, die K in sich überführen. Andererseits sei ϱ die elliptische Ent fernung zwischen einem festen Punkte $P_0(x_0, y_0)$ und einem variable $P(x, y)$. Setzt man zur Abkürzung: $K_0 \equiv x_0^2 + y_0^2 + 1 = 1 + r_0^2$ $p_0 \equiv x x_0 + y y_0 + 1$, und bedeutet c eine willkürliche Konstante, so i bekanntlich:

---

[3]) Der Einfachheit halber werde auch hier K an Stelle von K_1 geschrieben.

47) $$e^{\varrho c} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{KK_0}{p_0^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{KK_0}{p_0^2}}},$$

der kürzer:

47′) $$P = \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa}}},$$

ir

48) $$P = e^{\varrho c}, \qquad \varkappa = \frac{p_0^2}{KK_0}.$$

Aus (47′) folgt sofort die Umkehrung:

49) $$K = \frac{4P}{(1+P)^2}.$$

ann ergibt sich als Gleichung der elliptischen Kreise $\varrho = \text{konst.}$ mit dem ittelpunkt P_0 ohne weiteres:

50) $$E \equiv p_0^2 - \varkappa K K_0 \equiv p_0^2 - \lambda K = 0.$$

ies ist ein Büschel von Kegelschnitten mit der festen Hauptachse $(O_1 P_0)$ nd dem variierenden Mittelpunkt M mit den Koordinaten h, k, wo

51) $$h = \frac{x_0}{\lambda - r_0^2}, \qquad k = \frac{y_0}{\lambda - r_0^2},$$

ährend das Quadrat der numerischen Exzentrizität ε einfach umgekehrt roportional mit λ ausfällt:

52) $$\varepsilon^2 = \frac{r_0^2}{\lambda}.$$

Die Brennpunkte F_1, F_2 erfüllen eine Involution[4]) mit den Doppelementen O_1 und P_0.

Im besondern ist der Verlauf der folgende. Für $\lambda = 0$ resultiert die oppeltzählende Gerade p_0 (als eine ausgeartete Parabel); wächst λ bis $= r_0^2$, so hat man Hyperbeln, die für $\lambda = r_0^2$ eine eigentliche Parabel als renze haben; wächst λ weiter bis $\lambda = 1 + r_0^2$, so entstehen Ellipsen, die ich schließlich für $\lambda = 1 + r_0^2$ auf den Punkt P_0 (oder auch auf das aar der imaginären, von P_0 an K gehenden Tangenten) zusammenziehen, o ε den Minimalwert $\frac{r_0}{\sqrt{1+r_0^2}}$ annimmt. Darüber hinaus, sowie für negative λ werden die Kegelschnitte nullteilig.

[4]) Analog bilden auch die Scheitelpunkte S_1, S_2 eine Involution, mit den Doppelelementen Q_0 und P_0. Für beide Involutionen gilt dasselbe auch im hyperbolischen alle, nur daß sich die Involution der Brennpunkte natürlich auf diejenigen einteiligen egelschnitte des Büschels beschränkt, die die Gerade $(P_0 O_1)$ zur Hauptachse besitzen.

Andererseits bilde man die Gleichung der koaxialen Rotationskegel K im R_3, mit der festen Drehachse d_0 als Achse, und dem variierenden Drehwinkel δ als Öffnungswinkel:

$$(50') \qquad K_\delta \equiv (xx_0 + yy_0 + z)^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

die sich für $z = 1$, d. h. durch den Schnitt der Kegel mit der Ebene E auf (50) reduziert.

Dabei besteht zwischen $c = \cos\delta$ und ε die einfache Beziehung[5]):

$$(53) \qquad \varepsilon c = \frac{r_0^2}{1 + r_0^2}.$$

Nach dem Dandelinschen Satze[6]) sind die Brennpunkte F_1, F_2 des einzelnen Schnittkegelschnitts (50′) die Berührungspunkte mit E der beiden Kugeln, die den Kegel K_δ überall berühren. Die Mittelpunkte dieser Berührkugeln liegen auf der Achse d_0 und bilden eine Involution mit den Doppelelementen O und P_0. Zusammenfassend haben wir:

„Die zur Euklidischen R_3-Drehung um O gehörigen Rotationskegel K mit fester Drehachse d_0 als Achse und variierendem Drehwinkel δ als Öffnungswinkel werden von der elliptischen Ebene E in dem Büschel der elliptischen Kreise (50) mit festem Mittelpunkt P_0 geschnitten."

Umgekehrt gelangt man bei vorgegebener Ebene E zum Punkte O des R_3, indem man auf E die Normalebene N durch die Gerade (P_0O_1) legt, in ihr auf der Geraden in P_0 die Lotgerade errichtet und diese mit dem Kreise über dem Durchmesser (P_0O_1) schneidet. Von den beiden sich ergebenden, symmetrisch zu E gelegenen Punkten O kann nach Belieben einer ausgewählt werden.

Geht man nunmehr von der elliptischen Ebene E über zum elliptischen $R_3(q = 1)$ der Nr. 1, so entstehen die elliptischen Analoga zu den Euklidischen Kugeln aus den Kegelschnitten des Büschels (50′) einfach dadurch, daß diese um ihre Hauptachse rotieren.

Diese Rotationsflächen 2. Grades erscheinen dann wiederum als Schnitte des Raumes $R_3(q = 1)$ mit den koaxialen Überkegeln K_δ mit der Spitze O, einer festen Drehachse d_0 und einem variierenden Drehwinkel δ als Öffnungswinkel.

---

[5]) Für einen einzelnen festen Kegel K_δ war diese Relation bereits bekannt.

[6]) Der Dandelinsche Satz läßt sich in der Form aussprechen, daß, wenn man an eine Kugel von einem Punkte außerhalb den Berührungskegel legt, jede Gerade auf der Kugel (Minimalgerade) den Kegel berührt. Bei projektiver Verallgemeinerung wird der Satz fast selbstverständlich. Denn ist F_2 eine eigentliche einteilige Fläche 2. Grades, und c irgendein eigentlicher einteiliger Kegelschnitt auf F_2, so trifft jede Gerade auf der F_2 den Kegelschnitt c nur an *einer* Stelle, muß also den auf c stehenden Berührungskegel der F_2 berühren.

Ähnlich gestaltet sich die Sache im hyperbolischen Falle. An die elle von (50) und (50′) treten die Gleichungen:

0 a) $$p_0^2 - \varkappa K K_0 \equiv p_0^2 - \lambda K = 0,$$

$K \equiv x^2 + y^2 - 1$, $K_0 \equiv x_0^2 + y_0^2 - 1$, $p_0 \equiv x x_0 + q q_0 - 1$, und

0 a′) $$(x x_0 + y y_0 - z)^2 - \lambda (x^2 + y^2 - z^2) = 0.$$

ese Kegel (50 a′) berühren den, O mit dem Grundkreise $K \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$ rbindenden Kegel doppelt, längs der beiden Kanten, die O mit den Berührungspunkten der von $P_0(x_0, y_0)$ an den Grundkreis laufenden Tangenten rbinden.

(Eingegangen am 14. April 1922.)

Streckenkomplexe auf Flächen.

Von

Friedrich Levi in Leipzig.

Mit C wird im folgenden ein beliebiger zusammenhängender Strecken-komplex, mit $\bar{C}$ aber ein C bezeichnet, in dem jeder Punkt eine gerade Anzahl von Strecken begrenzt. Jeder $\bar{C}$ läßt sich in einem geschlossenen Zuge[1]) durchlaufen, und es wird (§ 1) gezeigt, daß ein auf einer Fläche Φ gegebener $\bar{C}$ auch „schlicht", d. h. ohne Überschneidung durchlaufen, oder — was dasselbe ist — durch eine singularitätenfreie Jordankurve approximiert werden kann. Denselben $\bar{C}$ approximierende Jordankurven sind nicht immer homolog; doch ermöglicht ihre Betrachtung eine Einteilung der $\bar{C}$ nach „Arten". Gleichartig sind dabei zwei $\bar{C}$, wenn sie durch Hinzufügung und Wegnahme von zu 0 homologen Kreisen aus einander hervorgehen. Die Arten der $\bar{C}$ auf einer gegebenen Fläche Φ bilden dann eine Abelsche Gruppe von besonders einfachem Bau (§ 4). Zwischen der Art von $\bar{C}$, den Invarianten von Φ, der Farbenzahl der Domäneneinteilung und speziellen Formen der Durchlaufung ergeben sich mehrere Beziehungen (§§ 2, 3). Zum Schluß wird nach den Flächen gefragt, die durch einen gegebenen C oder $\bar{C}$ hindurchgehen.

§ 1.

Auf Φ liege ein $\bar{C}$ mit α_0 Eckpunkten $P_1, \ldots, P_{\alpha_0}$ und α_1 Strecken. Man zerlege Φ so in Elementarflächenstücke, daß jedes P_i im Inneren eines Elementarflächenstückes ε_i liegt und die von P_i begrenzten Strecken die Berandung σ_i von ε_i in nur je einem Punkte schneiden. Die σ_i sollen keinen Punkt gemeinsam haben. Bei einer einzügigen Durchlaufung Δ von $\bar{C}$ sollen die Schnittpunkte A_i^k und B_i^l von $\bar{C}$ und σ_i in der Reihenfolge

$$A_i^1 P_i B_i^1 A_i^2 P_i B_i^2 \ldots A_i^r P_i B_i^r A_i^1$$

[1]) Euler, Petrop. Comm. 8, 1741, S. 128—140. — Weitere Literatur s. Dehn-Heegaard, Enzykl. d. math. Wissensch. III AB3. An die dort eingeführte Bezeichnungsweise schließt sich diese Note im allgemeinen an.

ıfeinanderfolgen. Die Reihenfolge der A_i^k und B_i^l längs σ_i ist durch P_i nd Δ bis auf zyklische und antizyklische Vertauschung eindeutig bestimmt. ann man die Paare $A_i^1 B_i^1, \ldots, A_i^\nu B_i^\nu$ durch ν in ε_i verlaufende, sich egenseitig nicht schneidende Streckenzüge verbinden (d. h. gibt es keine vei sich auf σ_i gegenseitig trennenden Paare), so soll Δ „*in P_i schlicht*" eißen; wechseln die A_i und B_i längs σ_i ab, so heißt Δ „*in P_i alternierend*"; folgen $A_i', B_i', \ldots, A_i^\nu B_i^\nu$ längs σ_i zyklisch aufeinander, heißt Δ *in P_i zyklisch*". Ferner soll Δ *schlicht*, *alternierend* oder *zyklisch* eißen, wenn es in jedem Punkte diese Eigenschaft besitzt Zyklische Δ nd gleichzeitig alternierend und schlicht. Zur Erläuterung folgende Beiiele:

1. Zwei Kreise eines parabolischen Kreisbüschels auf der Kugel.
2. Drei „ „ „ „ „ „ „
3. Zwei Gerade eines Strahlenbüschels in der projektiven Ebene.

1. kann zyklisch, 2. schlicht und alternierend, aber nicht zyklisch, schlicht, aber nicht alternierend durchlaufen werden.

Satz 1. *Jeder $\bar{C}$ auf Φ kann schlicht durchlaufen werden.*

Beweis. Da $\bar{C}$ kein „Baum" sein kann, muß $\alpha_1 - \alpha_0 \geqq 0$ sein. Für

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2} \sum_1^{\alpha_0} 2\nu_i$$

(wobei $2\nu_i$ = Anzahl der von P_i begrenzten Strecken > 0)

ıuß daher $\nu_i = 1$, also $\bar{C}$ ein Kreis sein, und der Satz ist in diesem alle bewiesen. Man wähle daher $\alpha_1 - \alpha_0$ als Parameter einer vollständigen nduktion. Es sei $\alpha_1 - \alpha_0 = m + 1$. Die $2\nu_i$ von P_i begrenzten Strecken $\nu_i > 1$) treffen σ_i in $D_1, \ldots, D_{2\nu_i}$, wobei diesmal die Indizes in der eihenfolge auf σ_i genommen sind. Ersetzt man nun $D_k P_i$ und $D_{k+1} P_i$ urch einen Bogen $D_k D_{k+1}$ von σ_i, so geht entweder $\bar{C}$ in $\bar{C}'$ über wobei $\alpha_1' - \alpha_0' = m$), oder $\bar{C}$ zerfällt in zwei Komplexe. Im ersten Falle ann man nach der Induktionsvoraussetzung $\bar{C}'$ schlicht durchlaufen. Diese)urchlaufung bleibt aber schlicht, wenn man auf ihr $D_k D_{k+1}$ wieder urch $D_k P_i D_{k+1}$ ersetzt. Es bleibt also nur zu beweisen, daß man k o wählen kann, daß $\bar{C}$ bei dem Ersetzen der Strecken nicht zerfällt. ıngenommen, $\bar{C}$ zerfällt, wenn man irgendeinen der ν Streckenzüge $D_1 P_i D_2$, $D_3 P_i D_4$, $\ldots$, $D_{2\nu-1} P_i D_{2\nu}$ durch den entsprechenden Bogen $D_{2\mu-1} D_{2\mu}$ ersetzt, dann zerfällt es in genau ν Komplexe vom Typus $\bar{C}$, enn man alle diese Veränderungen zugleich vornimmt, also in ν durch ffene Züge durchlaufbare Komplexe $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$, wenn man alle trecken innerhalb ε_i fortläßt. Dabei enthält C_j stets die Punkte D_{2j-1}

und D_{2j}. Ersetzt man daher in $\bar{C}$ in diesem Falle $D_2 D_i D_3$ durch d Bogen $D_2 D_3$, so bleibt der Komplex zusammenhängend.

Die Definition von „schlicht" läßt sich auch auf offene Durchlaufung eines C übertragen; nur fehlen dann A_1^1 und $B_{\alpha_0}^{\nu_{\alpha_0}}$. Zwei Komplexe und C'', die P gemeinsam haben, sollen sich in P „überschneiden wenn (in der bisherigen Bezeichnungsweise) auf σ sich A_k', B_k' und A_l'', gegenseitig trennen. Dann gilt:

Satz 2. *Hat C auf Φ $2k$ jeweils eine ungerade Anzahl von Streck begrenzende Eckpunkte, so kann man C in k sich nicht überschneidend schlichten offenen Zügen durchlaufen.*

Zum Beweise ergänzt man Φ durch Aufsetzen von k die Eckpunk ungerader Streckenzahl verbindende Henkel zu $\bar{\Phi}$ und C durch Hinzufüg von k längs dieser Henkel geführter Strecken zu $\bar{C}$. Man kann dann auf $\bar{\Phi}$ schlicht durchlaufen. Durch Weglassen der neuen Strecken u Henkel ergibt sich dann die verlangte Durchlaufung von C mittels schlichter sich nicht überschneidender Züge.

Ist Δ eine schlichte Durchlaufung von $\bar{C}$ und ersetzt man in jede ε_i die Streckenzüge $A_i^\varkappa P_i B_i^\varkappa$ durch sich nicht schneidende Streckenzü $A_i^\varkappa B_i^\varkappa$, so wird aus C ein einfacher Kreis K_Δ. Ist nun $\bar{C}$ nicht a abstrakter Streckenkomplex, sondern als Komplex stetiger Kurvenstüc gegeben, so bekommt man auf diese Art eine Jordankurve $p = f($ [p = Ortsvektor], und wenn ε_i durch ε_i', $\varepsilon_i'' \ldots \to P_i$ ersetzt wird, erhält man eine Folge von Jordankurven $p = f'(\lambda)$, $p = f''(\lambda)$, . Der Parameter λ läßt sich dabei so wählen, daß alle $f^{(\nu)}(\lambda)$ genau d Periode 1 haben und jedem Punkte auf $\bar{C}$, der außerhalb $\varepsilon_1^{(\nu)} \ldots \varepsilon_{\alpha_0}^{(\nu)}$ lieg in $f^{(\nu)}, f^{(\nu+1)}, \ldots$ derselbe Parameterwert λ entspricht. Also:

Satz 3. *Jeder $\bar{C}$ auf Φ läßt sich durch Jordankurven auf Φ*

$$p = f(\lambda),\ p = f'(\lambda),\ \ldots \quad (\textit{alle } f^{(\nu)}(\lambda) \textit{ mit der Periode } 1$$

derart approximieren, daß für jedes λ

$$F(\lambda) = \operatorname*{Lim}_{\nu \to \infty} f^{(\nu)}(\lambda)$$

ein Punkt von $\bar{C}$ ist und jedem Punkte von $\bar{C}$ ein und fast allen Punkte von $\bar{C}$ nur ein Wert $0 < \lambda \leqq 1$ entspricht.

Die Funktion $F(\lambda)$ ist dann eine Parameterdarstellung von $\bar{C}$, d — bis auf die Periode — in fast allen Punkten eineindeutig ist. S ergibt also eine geschlossene Durchlaufung von $\bar{C}$. Daher kann der Satz nur für Komplexe vom Typus $\bar{C}$ gelten. Da man aber durch Verdoppelun von Strecken aus jedem C ein $\bar{C}$ machen kann, gilt für beliebige C ei

ähnlicher Satz, in dem nur verlangt wird, daß fast jedem Punkte höchstens zwei Werte $0 < \lambda \leqq 1$ entsprechen.

[Man kann diesen Satz auch dadurch einsehen, daß man ihn erst für Strecken, dann für Bäume, zuletzt für Bäume mit Singularitäten (d. h. willkürliche C) beweist.]

§ 2.

Alle zur gleichen Durchlaufung Δ eines $\bar{C}$ auf Φ gehörigen Kreise K_Δ sind homotop. Es wird nun gezeigt, daß es nicht von Δ, sondern nur von $\bar{C}$ und Φ abhängt, ob K_Δ ein Rückkehrschnitt ist.

Aus den von $\bar{C}$ auf Φ bestimmten Domänen denke man sich die innerhalb ε_i liegenden Teile herausgeschnitten. Längs $\bar{C}$ benachbarte Domänen sind dann auch stets längs K_Δ benachbart. Wird Φ von K_Δ zerschnitten, so liegt jede der (verstümmelten) Domänen ganz in einem der beiden Teile und benachbarte in verschiedenen Teilen. Es gilt also für die Domänen ein „Zweifarbensatz". Zerfallen umgekehrt die Domänen in zwei Klassen nicht benachbarter Domänen, so wird Φ von K_Δ zerstückelt. Denn: Ein Punktepaar A_i'', B_i'' zerlegt σ_i in zwei Bogen, deren jeder — da Δ schlicht ist — gleich viele Punkte A wie Punkte B enthält. Es grenzen also an jeden Bogen eine ungerade Anzahl Domänen an. Da aber die an σ_i grenzenden Domänen abwechselnd zu den beiden Klassen gehören, werden innerhalb ε_i nur Domänen derselben Klasse verbunden. K_Δ zerlegt also Φ in zwei Stücke; jedes enthält eine Klasse von Domänen. Die Einteilung der Domänen in zwei Klassen ist aber auf höchstens eine Art möglich. Ist nun Φ eine berandete Fläche, so ist K_Δ dann und nur dann homolog 0 ($K_\Delta \sim 0$), wenn die Domänen der einen Klasse an keinen Rand grenzen. Also:

Satz 4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß K_Δ die Fläche Φ zerschneidet, ist die Zweifarbigkeit der von C auf Φ bestimmten Domänenteilung. Ferner ist dann und nur dann $K_\Delta \sim 0$, wenn bei zweifarbiger Domänenteilung die Domänen der einen Farbe keinen Rand von Φ begrenzen.*

Folgerungen. 1. Gehören Δ und Δ' zu denselben C und Φ und ist K_Δ ein Rückkehrschnitt, so ist auch $K_{\Delta'}$ ein Rückkehrschnitt. 2. Berührt eine Domäne sich selbst längs einer Strecke, so ist K_Δ ein Rückkehrschnitt.

Definition. Ist $K_\Delta \sim 0$, so heißt $\bar{C}$ „von der Art 1".

Sind $\bar{C}'$ und $\bar{C}''$ zwei Komplexe von der Art 1 mit gemeinsamen Punkten, so zerlegen sie Φ in je zwei Klassen von Domänen A und B

bzw. I und II; dabei sollen etwa auftretende Ränder von Φ nur A und begrenzen. Bildet man durch Zusammenfassung

$$\bar{C} = (\bar{C}'\,\bar{C}''),$$

so erzeugt $\bar{C}$ auf Φ die Domänenklassen $(A\,\mathrm{I})$, $(A\,\mathrm{II})$, $(B\,\mathrm{I})$, $(B\,\mathrm{II})$. Da aber Domänen aus $(A\,1)$ und $(B\,\mathrm{II})$ sowie aus $(A\,\mathrm{II})$ und $(B\,\mathrm{I})$ nicht benachbart sind, ist

$$\alpha = (A\,\mathrm{I}),\ (B\,\mathrm{II}); \qquad \beta = (A\,\mathrm{II}),\ (B\,\mathrm{I})$$

die durch C erzeugte zweifarbige Domänenklassenteilung, wobei Ränder von Φ nur an Domänen α grenzen können; also ist auch C von der Art 1. Setzt man umgekehrt voraus, daß $\bar{C}$ und $\bar{C}'$ von der Art 1 sind, so erkennt man durch analoge Betrachtung, daß

$$\mathrm{I} = (\alpha A),(\beta B); \qquad \mathrm{II} = (\alpha B),(\beta A)$$

die zu $\bar{C}''$ gehörigen Domänenklassen sind und $\bar{C}''$ von der Art 1 ist. Also:

Satz 5. *Besteht $\bar{C}$ aus $\bar{C}'$ und $\bar{C}''$ und ist $\bar{C}'$ von der Art* 1, *so ist $\bar{C}$ dann und nur dann von der Art* 1, *wenn $\bar{C}''$ von der Art* 1 *ist.*

Für zweiseitige geschlossene Flächen gilt:

Satz 6. *Gibt es eine schlichte alternierende Durchlaufung Δ von $\bar{C}$ und zerlegt $\bar{C}$ die Fläche in einfach berandete Domänen, so ist $\bar{C}$ von der Art* 1, *und ist $\bar{C}$ von der Art* 1, *so sind alle seine schlichten Durchlaufungen alternierend*[2]).

Beweis. Ist Δ alternierend und gibt man den Strecken von $\bar{C}$ die Indikatrix von Δ, so erhält jede Domäne eine Indikatrix und benachbarte Domänen verschiedene Indikatrizen. Die Domänen zerfallen also (mit Rücksicht auf die Zweiseitigkeit der Fläche) in zwei Klassen nicht benachbarter Domänen. Wird umgekehrt Φ durch K_1 zerlegt, so bekommen die beiden Stücke und damit die zu ihnen gehörigen Domänen entgegengesetzte Indikatrix. Daher müssen die an einen Eckpunkt P_i angrenzenden Strecken P_i abwechselnd zum Anfangs- oder Endpunkt haben.

Die Sätze 1, 4, 6 werden besonders anschaulich, wenn man zur reziproken Form der Darstellung übergeht. Es handelt sich dann um die „Schmugglerreise", d. h. die Aufgabe, alle Ländergrenzen in geschlossener Reiseroute je einmal zu überschreiten. Es gilt dann

---

[2]) Daß dieser Satz für einseitige geschlossene Flächen nicht allgemein gilt, zeigt § 1, Beisp. 3. — Der einfache Rückkehrschnitt zerlegt die Fläche nicht in einfach berandete Domänen, sondern die Domäne hat zwei (zusammenfallende) Ränder.

Satz 1′. *Hat jedes „Land“ auf der Landkarte einer beliebigen Fläche Φ eine gerade Anzahl von Grenzen, so kann man die Schmugglerreise so durchführen, daß die Reiseroute keine mehrfachen Punkte besitzt.*

Satz 4′. *Die Reiseroute ist dann und nur dann ein Rückkehrschnitt, wenn man aus einer ungeraden Anzahl von Grenzen einen Kreis auf Φ bilden kann.*

Dafür, daß die Eckpunkte eines Komplexes in zwei Klassen zerfallen, ist nämlich notwendig und hinreichend, daß jeder Kreis auf dem Komplex eine gerade Anzahl Eckpunkte enthält.

Satz 6′. *Ist Φ zweiseitig und wird es von der Reiseroute zerschnitten, so müssen bei jedem Lande die „Einreisegrenzen“ und „Ausreisegrenzen“ abwechseln.*

In den bisherigen Untersuchungen — ebenso in § 4 — wird nicht vorausgesetzt, daß Φ mit endlich vielen Elementarflächenstücken überdeckbar ist[3]) ist. Es fallen also auch Flächen mit unendlich vielen Henkeln, Kreuzhauben oder Rändern in den Kreis der Betrachtungen.

§ 3.

Für die Flächen Φ_0 vom Geschlechte 0 besagen die bisherigen Sätze, daß auf ihnen jede Domänenteilung durch einen $\bar{C}$ zweifarbig ist und alle schlichten Durchlaufungen von $\bar{C}$ alternierend sind, also auf Φ_0 alle regulären Komplexe vom Grade 4 „zyklisch“ durchlaufen werden können. Man kann diese Resultate auch ableiten mit Hilfe der Funktion $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta} \frac{dz'}{z'-z}$, die sich bei Überschreitung von $\bar{C}$ um ± 1 ändert, in Nachbargebieten also (mod 2) verschieden sein muß.) Bei zwei schlichten Durchlaufungen Δ und Δ' von $\bar{C}$ auf Φ_0 haben entweder alle Strecken die gleiche oder alle die entgegengesetzte Indikatrix. Über die zyklische Reihenfolge A_i^k, B_i^l auf σ_i kann man aussagen, daß 1. die A_i und B alternieren, 2. keine zwei Paare $A_i^k B_i^k$ und $A_i^l B_i^l$ sich gegenseitig trennen (Schlichtheitsbedingung), 3. keine zwei Paare $B_i^k A_i^{k+1}$ und $B_i^l A_i^{l+1}$ sich

[3]) Um ein System von Axiomen und Definitionen für solche allgemeineren Flächen zu erhalten, braucht man nur dasjenige von Dehn-Heegaard, Enzykl. d. math. Wissensch. III A B 3 dadurch zu modifizieren, daß man auf S. 157 ersetzt:

$$\{P_0^1, P_0^2, \ldots, P_0^{\alpha_0}; S_1^1, S_1^2, \ldots, S_1^{\alpha_1}; S_2^1, S_2^2, \ldots, S_2^{\alpha_2}\}$$

durch

$$\{P_0^1, P_0^2, \ldots, S_1^1, S_1^2, \ldots, S_2^1, S_2^2, \ldots\}.$$

daß noch weitere Verallgemeinerungen möglich sind, kann zunächst außer Betracht bleiben.

gegenseitig trennen; sonst müßten sich die außerhalb ε_i verlaufend Streckenzüge von K_Δ $B_i^k A_i^{k+1}$ und $B_i^l A_i^{l+1}$ schneiden.

Für die projektive Ebene folgt aus Satz 1 und 4, daß die zu $\bar{C}$ g hörigen K_Δ entweder alle einen Kegelschnitt oder alle einer Gerad homotop sind. Man kann hier also die $\bar{C}$ unterscheiden, je nachdem s einem Kegelschnitt oder einer Geraden „mit Punktsingularitäten homotop sind, und es sind zwei geschlossene Kurven, die demselben $\bar{C}$ mit Punk singularitäten homotop sind, auch zueinander homotop. Diese Behauptu trifft für andere Flächen nicht zu. So ist z. B. auf dem Torus der a einem Meridiankreis und einem Polkreis bestehende $\bar{C}$ zu zwei Kurv mit Punktsingularitäten homotop, die zueinander nicht homotop sind. ein Geradenpaar die projektive Ebene zerstückelt, folgt aus Satz 5, d ein aus m dem Kegelschnitt und n der Geraden homotopen Kurven b stehender $\bar{C}$ dann und nur dann die projektive Ebene zweifarbig zerleg wenn n gerade ist.

Auch der Eulersche Durchlaufungssatz[1]) läßt sich auf die projektiv Ebene anwenden. Das vollständige räumliche Fünfeck ist ein $\bar{C}$; se Schnitt mit der projektiven Ebene ist eine Desarguessche Konfigur tion D. Jeder einzügigen Durchlaufung von $\bar{C}$ entspricht ein doppelpunk freies Zehneck, dessen Ecken die Punkte von D und dessen Seiten je ei Strecke der Geraden von D sind. Es gibt also $\frac{5!}{2 \cdot 10} = 6$ solche Zehneck

§ 4.

Zwei Komplexe $\bar{C}'$, $\bar{C}''$ auf Φ sollen „*gleichartig*“ heißen, wenn s durch Hinzufügung von endlich vielen zu 0 homologen Kurven in de selben Komplex $\bar{C}$ verwandelt werden können. Die Gleichartigkeit genü den Gesetzen der Klassenbildung. Bezeichnet man mit „Doppelstrecke zwei homotope, dieselben Punkte verbindende Streckenzüge und geht $\bar{C}$ aus $\bar{C}'$ durch Hinzufügen und Weglassen von beliebig vielen Doppelstrecke hervor, so sind $\bar{C}'$ und $\bar{C}''$ gleichartig. Daraus folgt zunächst, daß jed C mit den zugehörigen K_Δ gleichartig ist. Man braucht, um dies ei zusehen, nur — in der früheren Beziehungsweise — zu K_Δ die Kreis $A_i^k P_i B_i^k A_i^k$ (~ 0) hinzuzufügen und die Doppelstrecken $A_i^k B_i^k$ we zunehmen, dann erhält man $\bar{C}$. Es sind daher alle Komplexe der Art zueinander „gleichartig“ (in der neuen Bezeichnungsweise) und nach Satz kann ein Komplex der Art 1 auch nur zu Komplexen der Art 1 gleich artig sein. Ein Komplex ändert also seine Art nicht, wenn man eine Komplex der Art 1 hinzufügt. Ferner sind homologe Kurven gleichartig Komplexe. Sind nämlich $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ homolog, so kann man sie durc Hinzufügung einer Doppelstrecke zu $\bar{C}$ einem Komplex der Art 1 ergänz

je zwei Punkte lassen sich durch einen endlichen Streckenzug verbinden). $\bar{C}\ \bar{C}_1$) besteht dann aus $\bar{C}_2$ und lauter Doppelstrecken, also sind $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ gleichartig.

Sind $\bar{C}_\alpha$ und $\bar{C}_{\alpha'}$ gleichartig, ebenso $\bar{C}_\beta$ und $\bar{C}_{\beta'}$, so sind auch $(\bar{C}_\alpha\ \bar{C}_\beta)$ nd $(\bar{C}_{\alpha'}\ \bar{C}_{\beta'})$ gleichartig. Daher ist $(\bar{C}_\alpha\ \bar{C}_{\alpha'})$ zu $(\bar{C}_\alpha\ \bar{C}_\alpha)$ gleichartig, und a dies nur aus Doppelstrecken besteht, von der Art 1. Sind ferner $\bar{C}_\alpha\ \bar{C}_\beta)$ und $(\bar{C}_{\alpha'}\ \bar{C}_{\bar{\beta}})$ gleichartig, so ist auch $(\bar{C}_\alpha\ \bar{C}_\alpha\ \bar{C}_\beta)$ und $(\bar{C}_\alpha\ \bar{C}_{\alpha'}\ \bar{C}_{\bar{\beta}})$ leichartig. $\bar{C}_\beta$, $\bar{C}_{\bar{\beta}}$ werden also durch Hinzufügung von Komplexen der rt 1 gleichartig, sind also gleichartig. Das bedeutet:

Satz 7. *Die Arten der Komplexe $\bar{C}$ auf einer Fläche Φ bilden ine Abelsche Gruppe. Die Art* 1 *ist das Einheitselement, die übrigen lemente haben die Ordnung* 2. *Gruppenoperation ist die Vereinigung er Komplexe zu einem neuen Komplex.*

Hat man es mit Flächen endlichen Zusammenhangs zu tun, so läßt ich die Definition der Gleichartigkeit etwas schärfer fassen: man kann erlangen, daß die gleichartigen Komplexe durch Hinzufügung endlich ieler zu 0 homotoper Kurven in denselben Komplex verwandelt werden. ügt man nämlich zu einer Kurve $\bar{C} \sim 0$ die sämtlichen (endlich vielen) erandungen der Elementarflächenstücke hinzu, aus denen die von $\bar{C}$ beandete Domäne besteht, so erhält man einen aus Doppelstrecken bestehenen Komplex; es ist also $\bar{C}$ mit den zu 0 homotopen Komplexen gleichartig.

Ist Φ eine geschlossene Fläche endlichen Zusammenhangs, und $_1, a_2, \ldots, a_{2-N}$ ein Fundamentalsystem von Rückkehrschnitten, dann ist eder $\bar{C}$ mit einem K_Δ gleichartig und

$$K_\Delta \sim a_1^{\nu_1} \cdot a_2^{\nu_2} \ldots a_{2-N}^{\nu_{2-N}}$$

leichartig zu

$$a_1^{\delta_1} \cdot a_2^{\delta_2} \ldots a_{2-N}^{\delta_{2-N}},$$

obei $0 \leqq \delta_i \leqq 1$, $\delta_i \equiv \nu \pmod 2$.

Nun ist $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_\mu}$ stets einem Rückkehrschnitt homolog, also nicht on der Art 1. Daher können $a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_{2-N}^{\nu_{2-N}}$ und $a_1^{\nu_1'}, a_2^{\nu_2'}, \ldots, a_{2-N}^{\nu_{2-N}'}$ ur für $\nu_i \equiv \nu_i' \pmod 2$ gleichartig sein.

Die Anzahl der Arten bei geschlossenem Φ und endlichem Zusammenang ist daher 2^{2-N}.

Ist aber Φ eine ν-fach berandete Fläche vom Geschlechte 0, so marniere man auf der komplexen Zahlenkugel ν Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu$, so daß $_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_\nu = 0$, sonst aber keine lineare Beziehung mit ratioalen Koeffizienten zwischen den ζ_i besteht. Dann ist:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \sum_{i=1}^{\nu}{}' \frac{\zeta_i\, dz}{z - \zeta_i} = k_1 \zeta_1 + k_2 \zeta_2 + \ldots + k_{\nu-1} \zeta_{\nu-1},$$

wobei $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}$ ganze Zahlen sind, deren Wert eindeutig durch de Integrationsweg bestimmt wird. Man sieht dann — analog dem frühere Fall —, daß die Restklassen der $k_i \pmod 2$ die Art des Komplexes ein deutig bestimmen. Die Anzahl der Arten ist daher $2^{\nu-1} = 2^{1-N}$.

Um diese letzte Formel für alle ν-fach berandeten Φ von endliche Zusammenhang zu beweisen, ziehe man eine Kurve $K \propto 0$, die Φ zwei Stücke zerlegt, wovon Φ_1 nur den Rand K hat, Φ_2 eine $(\nu+1)$-fac berandete Kugel ist (dies ist stets möglich). K wird von einem b liebigen $\bar{C}$ in einer geraden Anzahl von Punkten: $F_1, F_2, \ldots, F_{2\mu}$ g schnitten. Ergänzt man $\bar{C}$ durch μ geeignet gewählte Doppelstrecke $F_{2i-1}F_{2i}$, so erhält man $(\bar{C}_1\ \bar{C}_2)$, wobei $\bar{C}_1$ in Φ_1, $\bar{C}_2$ in Φ_2 lieg $\bar{C}$ und $(\bar{C}_1\ \bar{C}_2)$ sind gleichartig. Ergänzt man Φ_1 und Φ_2 durch je e von K berandetes Elementarflächenstück zu Φ_1' und Φ_2', so sind zwei a Φ_1 gelegene Komplexe $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_1'$ dann und nur dann auf Φ_1' gleichart wenn $(\bar{C}_1\ \bar{C}_1')$ auf Φ_1' eine zweifarbige Domänenteilung erzeugt; da d Ränder von Φ und Φ_1 aber in der gleichen Domäne liegen, ist dies au die Bedingung dafür, daß $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_1'$ auf Φ und auch auf Φ_1 gleichart sind. Entsprechend beweist man, daß die auf Φ_2 liegenden Komplexe $\bar{C}$ und $\bar{C}_2'$ dann und nur dann auf Φ gleichartig sind, wenn sie es auf Φ_2' sin Nun gibt es $2^{\nu-1}$ Arten von Komplexen $\bar{C}_2$ auf Φ_2' und $2^{2-N-\nu}$ Arten v Komplexen $\bar{C}_1$ auf Φ_1'. Da aber jeder $\bar{C}$ gleichartig mit einem $(\bar{C}_1\ \bar{C}_2$ gibt es 2^{1-N} Arten auf Φ. Also:

Satz 8. *Auf einer Fläche von endlichem Zusammenhang gibt* 2^{2-N} *oder* 2^{1-N} *verschiedene Arten von Komplexen* $\bar{C}$, *je nachdem d Fläche geschlossen oder berandet ist.* $(N = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2.)$

Es folgt aus diesen Entwicklungen z. B., daß auf einer Fläche Φ v endlichem Zusammenhang jede aus Doppelstrecken bestehende Kurve hom log zu $a_1^{2\nu_1}\ a_2^{2\nu_2}, \ldots, a_{2-N}^{2\nu_{2-N}}$ ist, und umgekehrt, eine zu einem solchen Au druck hemologe Kurve, wenn Φ zweiseitig: nur für $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_{2-N} = 0$ wenn Φ einseitig: nur für $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_{2-N}$ eine singularitätenfrei Jordankurve sein kann. Für zweiseitige Flächen ist dies übrigens Spezia fall eines Satzes von Poincaré[4]).

§ 5.

Es ist bisher immer der Komplex auf einer Fläche vorausgeset worden. Durch einen Induktionsschluß mit dem Parameter $\alpha_1 - \alpha_0$ läß sich aber leicht beweisen, daß man durch jeden Komplex C auch ei Fläche legen kann. Durch Weglassen einer geeignet gewählten Strecke

[4]) Pal. Rend. 18 (1904), S. 70–76.

nn man nämlich, ohne C zu zerstückeln, $\alpha_1 - \alpha_0$ um 1 herabdrücken d braucht dann auf die Fläche des neuen Komplexes nur einen Henkel ngs S aufzusetzen. Kann man nun noch beweisen, daß für $\alpha_1 - \alpha_0 = \nu_0$ eine Fläche vom Geschlechte 0 als Träger von C gibt, so folgt, daß r $\alpha_1 - \alpha_0 = \nu$ es eine Fläche vom Geschlechte $p \leqq \nu - \nu_0$ gibt, durch e man C legen kann. Es wird $\nu_0 = 2$ bewiesen. Ohne Einschränkung er Allgemeinheit kann man annehmen, daß weder freie Enden noch lche Strecken vorkommen, deren Begrenzungspunkte zusammenfallen. benso kann man annehmen, daß jeder Eckpunkt drei Strecken begrenzt; nn Eckpunkte, die nur zwei Strecken begrenzen, kann man durch interne ransformation des Komplexes beseitigen und mehr als drei Strecken be- enzende Eckpunkte auf der Fläche ohne Änderung von $\alpha_1 - \alpha_0$ auflösen. aher $2\alpha_1 = 3\alpha_0$ und für $\nu = \alpha_1 - \alpha_0 = 2$ $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 6$. Ein solcher omplex ist entweder isomorph zu den Kanten eines Tetraeders oder ent- eht daraus durch Weglassen gewisser Kanten und Verdoppelung anderer. uf jeden Fall läßt sich durch ihn eine Fläche vom Geschlechte 0 legen. ür $\nu = 3$ ist das nicht mehr der Fall, wie das Beispiel des Sechsecks it drei Diagonalen (1, 4), (2, 5), (3, 6) zeigt ($\alpha_1 = 9$, $\alpha_0 = 6$). Da näm- ch keine drei Eckpunkte auftreten, die wechselseitig durch Strecken ver- unden sind, wird eine durch den Komplex gelegte Fläche in α_2 Poly- one von mehr als drei Seiten zerlegt. Daher $4\alpha_2 \leqq 2\alpha_1 = 18$, also $_0 - \alpha_1 + \alpha_2 < 2$. Die Fläche ist daher nicht vom Geschlechte 0. Es gilt so der Satz:

Satz 9. *Durch jeden C läßt sich eine Fläche vom Geschlechte* $\leqq \alpha_1 - \alpha_0 - 2$ *legen (bzw. $p = 0$, wenn $\alpha_1 - \alpha_0 < 2$).*

Für die Komplexe $\bar{C}$ gilt der etwas schärfere Satz:

Satz 10. *Durch jeden $\bar{C}$ läßt sich eine Fläche vom Geschlechte* $\leqq \alpha_1 - \alpha_0 - 4$ *(bzw. $p = 0$, wenn $\alpha_1 - \alpha_0 < 4$) legen; ferner kann man durch jeden $\bar{C}$ eine Fläche legen, auf der $\bar{C}$ „zyklisch" durchlaufen wer- den kann.*

Beweis. Ist $\alpha_1 - \alpha_0 \leqq 4$, so ist — wenn man von Punkten, die nur wei Strecken begrenzen, absieht —: $2\alpha_1 \geqq 4\alpha_0$; also $4 \geqq \alpha_0$, $8 \geqq \alpha_1$, und urch einen solchen Komplex läßt sich stets eine Fläche vom Geschlechte 0 gen. Aus einem beliebigen $\bar{C}$ kann man stets einen singularitätenfreien reis $P_1 \dots P_\mu$ aussondern, daß der Restkomplex $\bar{C}$ nicht zerfällt. $_1 - \alpha_0$ wird dabei um μ herabgedrückt. Durch Aufsetzen von μ Henkeln uf die Fläche von C' erhält man eine Fläche, auf der $\bar{C}$ liegt. Wird ber $\bar{C}'$ auf Φ' „zyklisch" durchlaufen und sind σ_i bzw. τ_i die an P_i renzenden zuerst bzw. zuletzt durchlaufenen Strecken, dann verbinde man ie an $\sigma_i P_i \tau_i$ angrenzenden Elementarflächenstücke auf Φ' durch μ Henkel.

Längs dieser Henkel kann man die Strecken $P_1P_2, \ldots, P_{\mu-1}P_\mu, P_\mu P_1$ so führen, daß die Durchlaufungen von $\bar{C}'$ und von $P_1 \ldots P_\mu P_1$ hintereinander ausgeführt eine zyklische Durchlaufung von $\bar{C}$ auf der Fläche ergeben.

Daß für $\alpha_1 - \alpha_0 = 5$ sich durch $\bar{C}$ nicht immer eine Fläche von Geschlechte 0 legen läßt, zeigt das Beispiel des vollständigen Fünfecks ($\alpha_0 = 5$, $\alpha_1 = 10$). Es muß hier sein $3\alpha_2 \leqq 2\alpha_1 = 20$, also $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 < 2$

Leipzig, den 26. April 1922.

(Eingegangen am 2. Mai 1922.)

ber Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte.

Von

Paul Funk in Prag.

Herr W. Blaschke hat in seinem unlängst erschienenen Buch „Vor-ungen über Differentialgeometrie“ die Frage nach jenen Flächen auf-vorfen, bei denen konjugierte Punkte einen festen geodätischen Abstand ben. Die Ergebnisse seiner Untersuchung lassen sich der Hauptsache h in der folgenden Weise zusammenfassen:

1. Bei Flächen dieser Art ist zu jedem Punkt immer nur ein einziger jugierter Punkt vorhanden, und umgekehrt: Auf Flächen, bei denen jedem Punkt nur ein einziger konjugierter Punkt vorhanden ist, hat Abstand der konjugierten Punkte ein und dieselbe feste Größe.

2. Flächen dieser Art haben lauter geschlossene doppelpunktfreie dätische Linien, die alle dieselbe Länge haben und durch ein Paar kon-ierte Punkte halbiert werden.

3. Flächen dieser Art lassen (bei passender Wahl der Längeneinheit) Linienelement von der Form

$$\sqrt{du^2 + G(u,v)\,dv^2}$$

wo u als geographische Breite, v als geographische Länge auf einer heitskugel aufgefaßt werden kann und $G(u,v)$ eine eindeutige gerade nktion des Ortes auf der Kugel bedeutet.

Das zuletzt genannte Ergebnis findet sich bei Blaschke nur in metrischer Form entwickelt. Analytisch gelangt man dazu durch die derung, daß für jede Lösung der Jacobischen Gleichung der Kurven konst.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - \frac{\dfrac{\partial^2 \sqrt{G(u,v)}}{\partial u^2}}{\sqrt{G(u,v)}}\, y = 0$$

je zwei aufeinander folgende Nullstellen die Entfernung π haben solle
Hat eine Lösung für $u = \alpha$ eine Nullstelle, so läßt sie sich darstell
in der Form

$$y = \sqrt{G(u,v)} \int_{\alpha}^{u} \frac{c}{G(u,v)}\, du \qquad (c = c(v$$

und aus

$$y(\alpha + \pi) = 0$$

folgt

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{1}{G(u,v)}\, du = 0.$$

Hierbei ist für das Integral an der Stelle $u = \pi$ der Cauchysche Haup
wert zu nehmen. Durch Differentiation nach α ergibt sich dann die ob
genannte Eigenschaft von G:

$$G(\alpha + \pi, v) = G(\alpha, v).$$

Herr Blaschke spricht nun die Vermutung aus, daß die einzi
Fläche mit diesen Eigenschaften die Kugel sei. Um seine Vermutung
stützen, wollen wir im folgenden zeigen, daß die Kugel nicht so variie
werden kann, daß Flächen entstehen, die von der Kugel verschieden si
und diese Eigenschaften besitzen. Genauer ausgedrückt: Indem wir z
Bequemlichkeit der Darstellung noch die völlig belanglose Voraussetzu
hinzufügen, daß die Länge der geodätischen Linien gleich 2π sein so
wollen wir also folgendes zeigen: Es gibt keine von Null verschiede
Potenzreihe

$$\Gamma(u,v) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \mu^{\nu} \cdot \gamma_{\nu}(u,v),$$

wo die $\gamma_{\nu}(u,v)$ als gerade eindeutige Funktionen des Ortes auf der Kug
aufgefaßt werden können und

$$\sqrt{du^2 + [\cos^2 u + \Gamma(u,v)]\, dv^2}$$

das Längenelement einer singularitätenfreien Fläche[1]) darstellt, so daß d
Extremalen des Variationsproblems

$$\int F\left(u, v, \frac{du}{dv}, \mu\right) dv = \int \sqrt{\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + [\cos^2 u + \Gamma(u,v)]}\, dv \to \text{Min}$$

lauter geschlossene doppelpunktfreie Kurven von der Länge 2π darstelle

[1]) Die Entwicklung von $\Gamma(u,v)$ nach Potenzen der Poldistanz, also nach Potenze
von $\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$ bzw. $\left(u + \frac{\pi}{2}\right)$ beginnt mit 4. Potenz; vgl. Darboux: Lecons sur
théorie générale des surfaces 3. Paris 1899, S. 161, 162.

tzen wir die Gleichung der Extremalen an in der Form: $u = u_0 + \sum_1^\infty \mu^\nu u_\nu$,
bei die u_ν Funktionen von v sind. Für die $\mu = 0$ lautet die Gleichung
r Extremalen:

$$\operatorname{tg} u_0 = \operatorname{tg} i \cdot \sin(v - \vartheta),$$

bei bedeutet i die Neigung eines Großkreises gegen des Äquator $u = 0$,
die geographische Länge seines Schnittpunktes mit dem Äquator.

Sei nun γ_m das erste von Null verschiedene Glied in der Potenzreihe
r Γ, so ist $\mu^m \cdot u_m$ das erste von Null verschiedene unter dem Summen-
ichen stehende Glied in dem Ansatz für u. Nun gilt aber für die
xtremalen

$$L = \int_\vartheta^{\vartheta+2\pi} \sqrt{\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \cos^2 u + \Gamma}\, dv = \int_\vartheta^{\vartheta+2\pi} F(u, v, u', \mu)\, dv = 2\pi.$$

so

$$\left[\frac{1}{m!}\frac{\partial^m L}{\partial \mu^m}\right]_{\mu=0} = \int_\vartheta^{\vartheta+2\pi} \left[F_u \cdot u_m + F_{u'} \cdot u_m' + \frac{1}{m!}\frac{\partial^m F}{\partial \mu^m}\right]_{\mu=0} dv = 0.$$

Wenden wir nun in derselben Weise wie bei der gewöhnlichen Her-
itung der Eulerschen Gleichung der Variationsrechnung auf das zweite
lied partielle Integration an, so erkennt man, daß das erste und zweite
lied zusammen genommen Null ergibt. Wir erhalten nämlich dann für
ese beiden Glieder

$$\{[F_{u'}]_{u=0} \cdot u_m\}_\vartheta^{\vartheta+2\pi} + \int_\vartheta^{\vartheta+2\pi} \left\{[F_u]_{\mu=0} - \frac{d}{dx}[F_{u'}]_{\mu=0}\right\} u_m\, dv.$$

er Ausdruck vor dem Integralzeichen verschwindet, weil u_0 (also auch $F_{u'}$)
d u_m die Periode 2π haben und der Ausdruck unter dem Integralzeichen
rschwindet, weil u_0 die Eulersche Differentialgleichung für $\mu = 0$ erfüllt.

Setzt man nun

$$\sqrt{du_0^2 + \cos^2 u_0\, dv^2} = d\lambda,$$

ergibt sich entweder durch direkte Rechnung oder bequemer durch
nwendung des Clairautschen Satzes

$$\frac{d\lambda}{dv} = \frac{\cos^2 u_0}{\cos i}$$

d somit erhalten wir

$$\left[\frac{1}{m!}\frac{\partial^m L}{\partial \mu^m}\right]_{\mu=0} = \frac{\cos^2 i}{2} \int_\vartheta^{\vartheta+2\pi} \frac{\gamma_m}{\cos^4 u_0}\, d\lambda = 0.$$

Das angeschriebene Integral ist aber genau das, was ich in meine Dissertation [2]) als „Kreisintegralfunktion" bezeichnet habe. Der Integrand ist eine gerade Funktion des Ortes auf der Kugel. Nun gilt aber der Satz [2]), daß die Kreisintegralfunktion einer geraden Funktion des Ortes auf der Kugel nur dann verschwindet, wenn die Funktion selbst verschwindet; also müßte $\gamma_m = 0$ sein, was im Widerspruch steht mit der Annahme, γ_m sei der erste von Null verschiedene Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung für Γ. Es muß also Γ selbst identisch verschwinden.

---

[2]) Math. Ann. **74** (1913), S. 283. Vgl. auch Minkowski: Über Körper konstanter Breite. Ges. W., S. 277—279.

(Eingegangen am 15. Mai 1922.)

Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen.

Von

Felix Hausdorff in Bonn.

Es sei $f(t)$ eine reelle oder komplexe, im Intervall $0 \leqq t \leqq 2\pi$ (im Lebesgueschen Sinn) integrable Funktion mit den Fourierkonstanten

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Wir setzen für $\alpha > 0$

1) $$J_\alpha(f) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^\alpha\,dt\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad S_\alpha(f) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

falls das Integral existiert, resp. die Reihe konvergiert; wenn keine Verwechselung zu befürchten ist, schreiben wir einfach J_α, S_α. Nun seien α, β zwei positive, durch

2) $$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

verknüpfte Zahlen, also gewiß $\alpha > 1$, $\beta > 1$ und entweder

$$\alpha < 2 < \beta \quad \text{oder} \quad \alpha = 2 = \beta \quad \text{oder} \quad \alpha > 2 > \beta.$$

Wir wollen die folgenden beiden Sätze beweisen:

I. *Ist $\alpha \leqq \beta$ und $\Sigma|a_k|^\alpha$ konvergent, so sind die a_k die Fourierkonstanten einer Funktion $f(t)$ mit integrablem $|f(t)|^\beta$ und zwar*

$$J_\beta \leqq S_\alpha.$$

II. *Ist $\alpha \leqq \beta$ und $|f(t)|^\alpha$ integrabel, so ist $\Sigma|a_k|^\beta$ konvergent und zwar*

$$S_\beta \leqq J_\alpha.$$

Für $\alpha = \beta = 2$ ist dies der bekannte Riesz-Fischersche Satz, zusammen mit der *Parsevalschen Gleichung* $J_2 = S_2$. Ferner hat Herr W. H. Young[1]) beide Sätze (in etwas anderer Form) für die Wertepaare

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha = 2, & \frac{4}{3}, & \frac{6}{5}, & \frac{8}{7}, \ldots \\ \beta = 2, & 4, & 6, & 8, \ldots \end{cases}$$

bewiesen. Wir werden unseren Beweis auf den Hilfssatz stützen:

III. *Ist $\alpha \leqq \beta$, so ist für jedes trigonometrische Polynom $f(t)$*

$$J_\beta \leqq S_\alpha.$$

Dabei werden wir, mit einem von Herrn Young stammenden Schlußverfahren, ebenfalls mit der Skala (3) beginnen, dann aber durch den Schluß von β auf $\frac{\beta}{2} + 1$ zu allen dyadisch rationalen und endlich zu allen reellen $\beta \geqq 2$ gelangen.

Unsere Sätze gestatten nur den Schluß vom kleineren Konvergenzexponenten α auf den größeren Integrabilitätsexponenten β und vom kleineren Integrabilitätsexponenten α auf den größeren Konvergenzexponenten β, also, grob gesprochen, von starker Konvergenz auf starke Integrabilität und von schwacher Integrabilität auf schwache Konvergenz. Die Ausdehnung des Parsevalschen Theorems ist also nur einseitig. Daß unsere Sätze in der Tat für $\alpha > \beta$ falsch sind, wollen wir nur durch die beiden extremen Beispiele belegen: die Herren Hardy und Littlewood[2]) haben an dem Fall

$$\sum_1^\infty \frac{e^{i n^2 t}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

gezeigt, daß die a_k überhaupt keine Fourierkonstanten zu sein brauchen, selbst wenn $\Sigma |a_k|^\alpha$ für jedes $\alpha > 2$ konvergiert, und Herr Carleman[3]) hat eine stetige, also in beliebig hoher Potenz integrable Funktion $f(t)$ angegeben, bei der $\Sigma |a_k|^\beta$ für jedes $\beta < 2$ divergiert.

---

[1]) Young, W. H.: Sur la généralisation du théorème de Parseval, Sur la sommabilité d'une fonction dont la série de Fourier est donnée [Comptes rendus 155 (1912, 1. Juli u. 26. August), S. 30–33, 472–475]; On the multiplication of successions of Fourier constants [Lond. Roy. Soc. Proc. 87 (1912), S. 331–339]; On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants [Lond. Math. Soc. Proc. (2) 12 (1912), S. 71–88].

[2]) Hardy, G. H. and Littlewood, J. E.: Some problems of Diophantine approximation [Acta math. 37 (1914), S. 155–239], vgl. S. 237.

[3]) Carleman, T.: Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion [Acta math. 41 (1918), S. 377–384]. Landau, E.: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carleman [Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 147–153].

Den Beweis des Satzes III für ein beliebiges trigonometrisches Polynom

$$f(t)=\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikt} \tag{4}$$

stützen wir auf folgende Überlegungen.

A. Für $u_k \geqq 0$, $v_k \geqq 0$, $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda+\mu=1$ gilt die Höldersche Ungleichung

$$\sum u_k v_k \leqq \left(\sum u_k^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda}\left(\sum v_k^{\frac{1}{\mu}}\right)^{\mu},$$

sei es, daß es sich um Summen von endlich oder abzählbar vielen Gliedern handelt. Wir schließen daraus

$$S_{a_2}^{\alpha_2(\alpha_3-\alpha_1)} \leqq S_{a_1}^{\alpha_1(\alpha_3-\alpha_2)} S_{a_3}^{\alpha_3(\alpha_2-\alpha_1)} \qquad (0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3), \tag{5}$$

was sich so aussprechen läßt, daß $\alpha \log S_\alpha$ eine nach oben konkave Funktion von $\alpha>0$ ist. Sei in der Tat

$$\alpha_2=\lambda\alpha_1+\mu\alpha_3, \qquad \lambda=\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3-\alpha_1}, \qquad \mu=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_1},$$

so entsteht

$$\sum |a_k|^{\alpha_2}=\sum |a_k|^{\lambda\alpha_1}|a_k|^{\mu\alpha_3} \leqq \left(\sum |a_k|^{\alpha_1}\right)^{\lambda}\left(\sum |a_k|^{\alpha_3}\right)^{\mu}$$

oder, in die Potenz $\alpha_3-\alpha_1$ erhoben, Ungleichung (5).

Aus derselben Quelle, der Hölderschen Ungleichheit für Summen und Integrale, fließen noch andere Abschätzungen, z. B. dieselbe Formel (5) für J_α; wir begnügen uns mit den folgenden beiden:

$$S_\alpha^\alpha=\sum_{-n}^{n}|a_k|^\alpha \leqq \left(\sum_{-n}^{n}|a_k|^{\frac{\alpha}{\lambda}}\right)^{\lambda}\left(\sum_{-n}^{n}1\right)^{\mu}=S_{\frac{\alpha}{\lambda}}^{\alpha}(2n+1)^{1-\lambda}$$

und

$$2\pi J_\alpha^\alpha=\int_0^{2\pi}|f(t)|^\alpha dt \leqq \left[\int_0^{2\pi}|f(t)|^{\frac{\alpha}{\lambda}}dt\right]^{\lambda}\left[\int_0^{2\pi}dt\right]^{\mu}=2\pi J_{\frac{\alpha}{\lambda}}^{\alpha}$$

d. h.

$$S_\alpha(2n+1)^{-\frac{1}{\alpha}} \leqq S_{\alpha_1}(2n+1)^{-\frac{1}{\alpha_1}}, \qquad J_\alpha \leqq J_{\alpha_1} \quad (0<\alpha<\alpha_1). \tag{6}$$

B. Für $u_k, v_k, w_k \geqq 0$, ferner $\lambda, \mu, \nu>0$, $\lambda+\mu+\nu=1$ lautet die Höldersche Ungleichung

$$\sum u_k v_k w_k \leqq \left(\sum u_k^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda}\left(\sum v_k^{\frac{1}{\mu}}\right)^{\mu}\left(\sum w_k^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}.$$

Ersetzt man hierin w_k durch $u_k^{\frac{\nu}{\lambda}} v_k^{\frac{\nu}{\mu}}$, sodann u_k durch $u_k^{\frac{\lambda}{\lambda+\nu}}$, v_k durch $v_k^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}$, und erhebt in die $\frac{1}{\nu}$-te Potenz, so entsteht

$$\left(\sum u_k v_k\right)^{\frac{1}{\nu}} \leqq \left(\sum u_k^{\frac{1}{\lambda+\nu}}\right)^{\frac{\lambda}{\nu}}\left(\sum v_k^{\frac{1}{\mu+\nu}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} u_k^{\lambda+\nu}\sum v_k^{\frac{1}{\mu+\nu}}. \tag{7}$$

Nun seien

$$f(t)=\sum a_k e^{ikt}, \qquad g(t)=\sum b_l e^{ilt}$$

zwei Polynome (wir lassen die Indizes alle ganzen Zahlen durchlaufen, während nur endlich viele Koeffizienten $\neq 0$ sind) und

$$f(t)g(t)=\sum c_m e^{imt}, \qquad c_m=\sum_k a_k b_{m-k},$$

dann erhält man aus (7) für $u_k=|a_k|$, $v_k=|b_{m-k}|$

$$|c_m|^{\frac{1}{\nu}} \leqq \Big(\sum_k |a_k|^{\frac{1}{\lambda+\nu}}\Big)^{\frac{\lambda}{\nu}} \Big(\sum_l |b_l|^{\frac{1}{\mu+\nu}}\Big)^{\frac{\mu}{\nu}} \sum_k |a_k|^{\frac{1}{\lambda+\nu}} |b_{m-k}|^{\frac{1}{\mu+\nu}}$$

und durch Summation nach m

$$\sum |c_m|^{\frac{1}{\nu}} \leqq \Big(\sum |a_k|^{\frac{1}{\lambda+\nu}}\Big)^{\frac{\lambda+\nu}{\nu}} \Big(\sum |b_l|^{\frac{1}{\mu+\nu}}\Big)^{\frac{\mu+\nu}{\nu}},$$

d. h.

$$S_{\frac{1}{\nu}}(fg) \leqq S_{\frac{1}{\lambda+\nu}}(f)\, S_{\frac{1}{\mu+\nu}}(g)$$

oder endlich, mit Vertauschung von λ, μ,

$$S_{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}(fg) \leqq S_{\frac{1}{1-\lambda}}(f)\, S_{\frac{1}{1-\mu}}(g), \tag{8}$$

wobei also $\lambda, \mu > 0$ und $\lambda+\mu<1$ vorausgesetzt ist. Diese bemerkenswerte Ungleichung stammt von Herrn Young; zur Bequemlichkeit des Lesers haben wir den kurzen Beweis wiedergegeben. Sie dehnt sich sofort auf mehrere Polynome aus; insbesondere erhält man für p gleiche Faktoren $f(t)=g(t)=\ldots$ und gleiche Exponenten $\lambda=\mu=\ldots=\frac{1}{2p}$

$$S_2(f^p) \leqq [S_{\frac{2p}{2p-1}}(f)]^p,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^{2p}\, dt = [S_2(f^p)]^2 \leqq [S_{\frac{2p}{2p-1}}(f)]^{2p}, \qquad J_{2p}(f) \leqq S_{\frac{2p}{2p-1}}(f),$$

womit die Formel $J_\beta \leqq S_\alpha$ für die Werte (3) bewiesen ist.

C. Suchen wir unter den Polynomen (4), für die

$$S_\alpha^\alpha = \sum_{-n}^{n} |a_k|^\alpha \qquad (\alpha>1)$$

einen vorgeschriebenen positiven Wert hat, dasjenige „Maximalpolynom“ (oder diejenigen), wofür

$$J_\beta^\beta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^\beta dt \qquad \Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\Big)$$

öglichst groß wird. Da $S_\alpha^\alpha, J_\beta^\beta$ stetige, partiell differenzierbare Funk-
nen der Komponenten x_k, y_k der Zahlen $a_k = x_k + i y_k$ sind, so ist so-
hl die Existenz eines Maximalpolynoms als auch die Anwendbarkeit
r Regeln der Differentialrechnung gesichert; man erhält, indem man
hließlich wieder ins Komplexe zurückgeht, die Bedingungen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^{\beta-1} \operatorname{sg} f(t)\, e^{-ikt}\, dt = \lambda |a_k|^{\alpha-1} \operatorname{sg} a_k \qquad (|k| \leqq n),$$

bei wie üblich $\operatorname{sg} z = \frac{z}{|z|}$ $(\operatorname{sg} 0 = 0)$ bedeutet. Der Multiplikator λ
gibt sich, indem man (9) mit $\bar{a}_k$ multipliziert und summiert, gleich

$$\lambda = J_\beta^\beta : S_\alpha^\alpha .$$

Nun liefert (9) unmittelbar die $2n+1$ ersten Fourierkonstanten der
nktion $|f(t)|^{\beta-1} \operatorname{sg} f(t)$; die auf diese Funktion angewandte Gleichung
$= S_2$ gibt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^{2\beta-2}\, dt \geqq \lambda^2 \sum_{-n}^{n} |a_k|^{2\alpha-2}, \qquad \lambda^2 \leqq J_{2\beta-2}^{2\beta-2} : S_{2\alpha-2}^{2\alpha-2},$$

d für jedes Maximalpolynom gilt also

$$J_\beta^\beta : S_\alpha^\alpha \leqq J_{2\beta-2}^{\beta-1} : S_{2\alpha-2}^{\alpha-1}. \tag{10}$$

Wir nehmen nun $\beta > 2 > \alpha$ an und setzen

$$\beta_0 = 2\beta - 2, \qquad \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} = 1,$$

her

$$\alpha_0 = \frac{2}{3-\alpha}, \qquad \alpha - \alpha_0 = \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{3-\alpha}, \qquad \alpha_0 - 2\alpha + 2 = 2\frac{(2-\alpha)^2}{3-\alpha},$$

daß

$$0 < 2\alpha - 2 < \alpha_0 < \alpha$$

fällt. Auf diese drei Argumente wenden wir (5) an:

$$S_{\alpha_0}^{\alpha_0(2-\alpha)} \leqq S_{2\alpha-2}^{(2\alpha-2)(\alpha-\alpha_0)} S_\alpha^{\alpha(\alpha_0-2\alpha+2)},$$

o bei Kürzung der Exponenten durch $2\cdot\frac{2-\alpha}{3-\alpha}$

$$S_{\alpha_0} \leqq S_{2\alpha-2}^{(\alpha-1)^2} S_\alpha^{1-(\alpha-1)^2}$$

r

$$S_{\alpha_0}^{\beta-1} \leqq S_{2\alpha-2}^{\alpha-1} S_\alpha^{\beta-\alpha},$$

(10) verbunden

$$\left(\frac{J_\beta}{S_\alpha}\right)^\beta \leqq \left(\frac{J_{\beta_0}}{S_{\alpha_0}}\right)^{\beta-1}.$$

Wenn also für den Exponenten $\beta_0 > 2$ bereits bekannt ist, daß f
jedes Polynom $J_{\beta_0} \leqq S_{\alpha_0}$, so erfüllt für den Exponenten $\beta = \frac{\beta_0}{2} + 1$ d
Maximalpolynom (mit größtem J_β bei vorgeschriebenem S_α) und folgli
jedes Polynom auch die Ungleichung $J_\beta \leqq S_\alpha$. Diese Ungleichung, f
$\beta = 2p$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ bewiesen, überträgt sich nun also auf die Zahl

$$\beta = p + 1, \quad \frac{p+3}{2}, \quad \frac{p+7}{4}, \quad \frac{p+15}{8}, \quad \ldots,$$

d. h. auf alle dyadisch rationalen Zahlen $\beta \geqq 2$, sodann auf *alle* Zahl
$\beta \geqq 2$ entweder durch eine Stetigkeitsbetrachtung oder mit Hilfe von (
Denn für $\alpha_0 < \alpha < \beta < \beta_0$ wird

$$J_\beta \leqq J_{\beta_0}, \qquad S_\alpha (2n+1)^{-\frac{1}{\alpha}} \geqq S_{\alpha_0} (2n+1)^{-\frac{1}{\alpha_0}},$$

also für dyadisch rationales $\beta_0 > 2$

$$J_\beta : S_\alpha \leqq (2n+1)^{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha}} = (2n+1)^{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_0}}$$

und, wenn man β_0 nach β konvergieren läßt: $J_\beta \leqq S_\alpha$

Damit ist der Hilfssatz III bewiesen. Der Übergang von Polynom
zu integrablen Funktionen vollzieht sich nun am einfachsten in folgend
Weise:

Beweis von I. Mit $\sum |a_k|^\alpha$ konvergiert erst recht $\sum |a_k|^2$ und
a_k sind die Fourierkonstanten einer (quadratisch) integrablen Funktion $f($
deren Fourierreihe die Partialsummen

$$f_n(t) = \sum_{-n}^{n} a_k e^{ikt} \tag{11}$$

hat; bekanntlich konvergiert

$$F_n(t) = \int_0^t f_n(t)\,dt \to \int_0^t f(t)\,dt = F(t).$$

Um zu zeigen, daß $|f(t)|^\beta$ $(\beta > 1)$ integrabel ist, hat man na
Herrn F. Riesz[4]) zu beweisen, daß das Hellingersche Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|dF(t)|^\beta}{dt^{\beta-1}}, \tag{12}$$

d. i. die obere Grenze der Summen

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{|F(t_i) - F(t_{i-1})|^\beta}{(t_i - t_{i-1})^{\beta-1}} \qquad (0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = 2\pi$$

[4]) Riesz, F.: Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen [Mat
Ann. 69 (1910), S. 449–497]; vgl. S. 462.

r alle Intervallteilungen, endlich ist; diese Bedingung ist notwendig wie

nreichend, und das Hellingersche Integral ist dann gleich $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^\beta dt$.

unserem Falle ist nun auf Grund von III

$$J_\beta(f_n) \leqq S_\alpha(f_n) \leqq S_\alpha(f) = S_\alpha,$$

so

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m} \frac{|F_n(t_i) - F_n(t_{i-1})|^\beta}{(t_i - t_{i-1})^{\beta-1}} \leqq S_\alpha^\beta$$

r jede Intervallteilung, daher $(n \to \infty)$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m} \frac{|F(t_i) - F(t_{i-1})|^\beta}{(t_i - t_{i-1})^{\beta-1}} \leqq S_\alpha^\beta$$

r jede Intervallteilung; das Hellingersche Integral (12) ist also end-
ch $\leqq S_\alpha^\beta$, und $|f(t)|^\beta$ integrabel mit $J_\beta \leqq S_\alpha$.

Beweis von II. Ist $|f(t)|^\alpha$ integrabel,

$$g(t) = \sum_{-n}^{n} b_k e^{ikt}$$

n beliebiges Polynom, so liefert die Höldersche Ungleichung für Integrale

$$\left|\sum_{-n}^{n} a_k b_k\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, g(-t)\, dt\right| \leqq J_\alpha(f) J_\beta(g)$$

nd auf Grund von III

$$|\sum_{-n}^{n} a_k b_k| \leqq J_\alpha(f)\, S_\alpha(g).$$

Nimmt man insbesondere $b_k = |a_k|^{\beta-1} \operatorname{sg} \bar{a}_k$, so wird

$$a_k b_k = |a_k|^\beta = |b_k|^\alpha,$$

nd man erhält, mit (11),

$$S_\beta^\beta(f_n) \leqq J_\alpha(f)\, S_\beta^{\frac{\beta}{\alpha}}(f_n), \qquad S_\beta(f_n) \leqq J_\alpha(f),$$

h. $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^\beta$ ist konvergent mit $S_\beta \leqq J_\alpha$.

(Eingegangen am 20. Mai 1922.)

Über die Staudeschen Kreiselbewegungen.

Von

W. van der Woude in Leiden.

§ 1.

Wie O. Staude gefunden hat, gibt es in jedem starren Körper m ganz beliebiger Massenverteilung durch jeden seiner Punkte eine unend liche Schar von Achsen folgender Eigenschaft: es kann der Körper unte der Wirkung der Schwere allein, wenn die betreffende Achse vertika gestellt und nur der erstgenannte Punkt festgehalten wird, mit bestimmte Winkelgeschwindigkeit gleichförmig um die Achse rotieren[1]). Die Stabilitä dieser Drehungen ist kürzlich in dieser Zeitschrift von R. Grammel ein gehend untersucht worden[2]).

In dieser kurzen Note möchte ich darauf hinweisen, daß die genannte Autoren übersehen haben, daß der Komplex dieser Drehungsachsen nicht anderes ist als der Komplex der Hauptträgheitsachsen des Körpers. Un dieses zu zeigen, werde ich auf möglichst einfache Weise die von Staud gestellte Frage beantworten; dann zeige ich weiter, wie man ausgehend von der bekannten Darstellung der Hauptträgheitsachsen leicht zu der vo Staude gefundenen Form der Gleichung des Komplexkegels geraten kann

§ 2.

Es sei $OXYZ$ ein festes Koordinatensystem; die vertikal gestellte Achse OZ falle mit der Drehungsachse des Körpers zusammen. Wenn wir vorläufig annehmen, die Drehungsachse werde in den Punkten

[1]) Journal für die reine und angew. Mathematik 113, S. 318; O. Staude, Übe permanente Rotationsachsen. Eine interessante geometrische Ableitung der Resultate von Staude findet man auch in F. Klein und A. Sommerfeld, Die Theorie des Kreisels, S. 387.

[2]) Mathematische Zeitschrift 6 (1920), S. 124; R. Grammel, Die Stabilität des Staudeschen Kreiselbewegungen.

$O(o,o,o)$ und $H(o,o,h)$ festgehalten, dann werden die Bewegung des Körpers und die Zwangskräfte gefunden aus:

$$1) \quad \begin{cases} X_1 + X_2 = -\omega^2 M\bar{x}; \quad Y_1 + Y_2 = -\omega^2 M\bar{y}; \quad Z_1 + Z_2 + Mg = 0, \\ \omega^2 \Sigma mgz + Mg\bar{y} = -hY_2; \quad \omega^2 \Sigma mxz + Mg\bar{x} = hX_2; \quad \omega = \text{konst.} \end{cases}$$

Es sind $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ die Komponenten der Zwangskräfte in O und H; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sind die Koordinaten des Schwerpunktes; ω sei die Winkelgeschwindigkeit und M die Masse des Körpers.

Den Punkt H können wir nun freilassen ohne die Bewegung des Körpers zu ändern, wenn stets

$$X_2 = Y_2 = 0.$$

Dazu ist notwendig und hinreichend

$$\bar{x} \Sigma myz = \bar{y} \Sigma mxz$$

oder

$$2) \quad \Sigma mx \cdot \Sigma myz = \Sigma my \cdot \Sigma mxz;$$

dann ist

$$3) \quad \omega = \sqrt{-\frac{Mg\bar{y}}{\Sigma myz}} = \sqrt{-\frac{Mg\bar{x}}{\Sigma mxz}}.$$

Man beachte, daß Σmx, Σmy, Σmxz und Σmyz nicht Konstante, sondern Funktionen von t sind, weil das Koordinatensystem fest ist und nicht mit dem Körper rotiert. Aber wenn OX' und OY' mit dem Körper verbundene Koordinatsachsen sind und Θ der Winkel zwischen OX und OX', so daß

$$x = x' \cos\Theta - y' \sin\Theta; \quad y = x' \sin\Theta + y' \cos\Theta,$$

dann transformieren sich (2) und (3) in

$$2') \quad \Sigma mx' \cdot \Sigma my'z = \Sigma my' \cdot \Sigma mx'z$$

$$3') \quad \omega = \sqrt{-\frac{Mg\bar{y}'}{\Sigma my'z}} = \sqrt{-\frac{Mg\bar{x}'}{\Sigma mx'z}}.$$

Die Formel $(2')$ ist aber die bekannte Bedingung dafür, daß die Achse OZ in einem ihrer Punkte $\left(0, 0, \frac{\Sigma mx'z}{\Sigma mx'}\right)$ eine Hauptträgheitsachse ist.

§ 3.

Es seien weiter mit OX, OY, OZ bezeichnet die Hauptträgheitsachsen im Punkte O. Gesucht wird die Gleichung des Komplexkegels der Hauptträgheitsachsen in O, m. a. W. es wird gesucht der Ort der Geraden g, die die Eigenschaft besitzen, daß:

$$\Sigma mx_1 \cdot \Sigma my_1 z_1 = \Sigma my_1 \cdot \Sigma mx_1 z_1,$$

wenn g zur Achse OZ_1 eines Koordinatensystems $x_1 y_1 z_1$ gewählt wird.

Wird bei dem Koordinatensystem $OXYZ$ die Gerade g dar gestellt durch

$$\frac{x}{\alpha_3} = \frac{y}{\beta_3} = \frac{z}{\gamma_3},$$

dann sind die Transformationsformeln beim Übergang vom System $OX_1Y_1Z_1$ auf $OXYZ$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z_1 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

Die Bedingung (4) transformiert sich dann in

$$(\alpha_1 \Sigma mx + \beta_1 \Sigma my + \gamma_1 \Sigma mz)(\alpha_2\alpha_3 \Sigma mx^2 + \beta_2\beta_3 \Sigma my^2 + \gamma_2\gamma_3 \Sigma mz^2)$$
$$- (\alpha_2 \Sigma mx + \beta_2 \Sigma my + \gamma_2 \Sigma mz)(\alpha_1\alpha_3 \Sigma mx^2 + \beta_1\beta_3 \Sigma my^2 + \gamma_1\gamma_3 \Sigma mz^2) =$$

Durch Ausmultiplizierung finden wir mit Berücksichtigung der bekannten Formeln

$$\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = \gamma_3,$$

wenn wir $M\bar{x}$ für Σmx und A für $\Sigma m(y^2 + z^2)$ einsetzen

$$\bar{x}(B - C)\beta_3\gamma_3 + \bar{y}(C - A)\gamma_3\alpha_3 + \bar{z}(A - B)\alpha_3\beta_3 = 0.$$

Der Ort der geraden g ist also der Kegel

$$\bar{x}(B - C)yz + \bar{y}(C - A)zx + \bar{z}(A - B)xy = 0.$$

Dies ist aber die Form, in der Staude die Gleichung seines Komplexkegels gegeben hat.

(Eingegangen am 30. Mai 1922.)

Untersuchungen über die Konvergenz der limitärperiodischen Jacobi-Ketten beliebiger Ordnung.

Von

Eugen Schlechter in Ziegelhausen.

Literatur.

I. Perron, Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus, Mathematische Annalen 64 (1907), S. 1–76.

II. Perron, Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen, Sitzungsberichte der bayr. Akademie, math.-phys. Klasse, 37 (1907), S. 401–482.

III. Perron, Über einen Satz des Herrn Poincaré, Crelles Journal 136 (1909), S. 17–37.

IV. Perron, Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung, Crelles Journal 137 (1910), S. 6–64.

V. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig u. Berlin (B. G. Teubner), 1913.

VI. von Pidoll, Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche, Dissertation, München 1912.

VII. Pringsheim, Zur Theorie der unendlichen Kettenbrüche, Sitzungsberichte der bayr. Akademie, math.-phys. Klasse, (1918), S. 65–92.

VIII. O. Szász, Über unendliche Kettenbrüche mit komplexen Elementen, Sitzungsberichte der bayr. Akademie, math.-phys. Klasse (1919), S. 395–406.

Wir zitieren diese Arbeiten mit dem Namen ihres Verfassers und wenn nötig, nter Beifügung der römischen Ziffern, unter denen sie hier angeführt sind.

§ 1.

Grundbegriffe.

Ein System von linearen Differenzengleichungen

1) $$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1^{(\nu)} A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2^{(\nu)} A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu)} A_\nu^{(j)} = 0 \qquad (\nu \geqq 0)$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ r \geqq 2)$$

nit den Anfangswerten

$$A_\nu^{(j)} = 1 \quad \text{für} \quad j = \nu$$
$$A_\nu^{(j)} = 0 \quad \text{für} \quad j \neq \nu \qquad (j, \nu = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

heißt eine *Jacobi-Kette von der Ordnung* $r-1$[1]). Die Zahlenfolge

$$A_\nu^{(j)} \qquad (\nu \geqq 0;\ j = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

heißen ihre *Lösungen* oder *Integrale*.

Mit $A_{\nu,\lambda}^{(j)}$ bezeichnen wir die Integrale der Kette

$$A_{\nu+r,\lambda}^{(j)} + a_1^{(\nu+\lambda)} A_{\nu+r-1,\lambda}^{(j)} + a_2^{(\nu+\lambda)} A_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu+\lambda)} A_{\nu,\lambda}^{(j)} = 0$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ \nu \geqq 0).$$

Für $\lambda = 0$ ist diese Kette mit der Kette (1) identisch, also ist

$$A_{\nu,0}^{(j)} = A_\nu^{(j)} \qquad (\nu \geqq 0)$$

Die Ketten erster Ordnung sind die Rekursionsformeln für die Näherungsz
zähler und Näherungsnenner des Kettenbruchs:

$$-a_1^{(0)} - \frac{a_2^{(1)}}{|-a_1^{(1)}} - \frac{a_2^{(2)}}{|-a_1^{(2)}} - \ldots - \frac{a_2^{(\nu)}}{|-a_1^{(\nu)}} - \ldots.$$

In sinngemäßer Erweiterung des bei Kettenbrüchen geltenden Konvergenz
begriffs definieren wir nun:

Die Kette (1) heißt *konvergent*[2]), wenn die Grenzwerte

$$(2) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r-1$$

existieren und endlich sind; das System dieser Grenzwerte heißt das
„Wertesystem der Kette".

Die Kette (1) heißt *unbedingt konvergent*[3]), wenn die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu,\lambda}^{(j)}}{A_{\nu-1,\lambda+1}^{(r-1)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r-1$$

für jede Zahl $\lambda \geqq 0$ existieren und endlich sind.

Nun bestätigt man durch vollständige Induktion leicht die Beziehung:

$$A_{\nu,\lambda}^{(0)} = -a_r^{(\lambda)} \cdot A_{\nu-1,\lambda+1}^{(r-1)} \qquad (\nu \geqq 1,\ \lambda \geqq 0).$$

Wenn also

$$a_r^{(0)} \neq 0,$$

so ist

$$\frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} = -a_r^{(0)} \cdot \frac{A_\nu^{(j)}}{A_\nu^{(0)}}.$$

---

[1]) Perron II, S. 404.
[2]) Perron II, S. 407.
[3]) Perron II, S. 411.

ann ist also wegen (2) die Forderung der Konvergenz gleichbedeutend it der Forderung, daß die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(j)}}{A_\nu^{(0)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r-1)$$

istieren und endlich sein sollen. Dann können wir auch den Konvergenzgriff folgendermaßen erweitern:

Die Kette (1) heißt *konvergent im weiteren Sinne*[4]), wenn es eine hl k ($k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$) derart gibt, daß die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(j)}}{A_\nu^{(k)}} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

istieren und endlich sind; wenn $k = 0$ ist, so liegt Konvergenz im oben finierten Sinne vor, die wir auch, wenn nötig, als „Konvergenz im geren Sinne" bezeichnen.

Nun gilt der

Hilfssatz 1[5]). *Die Kette* (1) *ist konvergent im weiteren Sinne, nn eine Zahl λ derart existiert, daß die Kette*

$$A_{\nu+r,\lambda}^{(j)} + a_1^{(\nu+\lambda)} A_{\nu+r-1,\lambda}^{(j)} + a_2^{(\nu+\lambda)} A_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu+\lambda)} A_{\nu,\lambda}^{(j)} = 0$$

n engeren Sinne) *konvergent ist und außerdem*

$$a_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Wir nennen die Kette (1) *reinperiodisch* oder *periodisch* schlechthin, nn

$$a_i^{(\nu)} = a_i \qquad (\nu \geqq 0;\ i = 1, 2, \ldots, r).$$

i einer solchen ist stets

$$A_{\nu,\lambda}^{(j)} = A_\nu^{(j)} \qquad (\nu, \lambda \geqq 0).$$

ir nennen die Kette (1) *limitärperiodisch*, wenn

$$\lim_{\nu=\infty} a_i^{(\nu)} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

e periodische Kette

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1 A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2 A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r A_\nu^{(j)} = 0$$

ßt *der limitärperiodischen zugeordnet.*

Unter der *charakteristischen Gleichung* der periodischen Kette (4) rstehen wir die Gleichung:

$$x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} x + a_r = 0.$$

[4]) Perron I, S. 28.
[5]) Perron I, S. 29.

Ihre Wurzeln bezeichnen wir durchweg mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_r$ und ordnen sie der absoluten Größe nach:

$$|\varrho_1| \geqq |\varrho_2| \geqq |\varrho_3| \geqq \cdots \geqq |\varrho_r|.$$

Die Gleichung (5) heißt *regulär*[6]), wenn — unter R den größten der absoluten Beträge der Wurzeln verstanden — entweder nur eine einfache oder mehrfache Wurzel vom Betrage R vorhanden ist; oder wenn mehrere den Betrag R haben, aber eine unter diesen einen höheren Vielfachheitsgrad besitzt als jede andere vom Betrage R. Die so ausgezeichnete Wurzel heißt Hauptwurzel; wir bezeichnen sie stets mit ϱ_1. Wichtig ist nun der

Hilfssatz 2[7]). *Die periodische Kette* (4) *ist dann und nur dann konvergent, wenn ihre charakteristische Gleichung regulär ist.*

Dieser Satz gilt auch dann noch, falls beliebig viele, jedoch nicht alle Wurzeln verschwinden; in dem trivialen Falle, daß sämtliche Wurzeln verschwinden, ist die Kette nicht konvergent.

Wir denken uns jetzt eine beliebige, reinperiodische Kette (4) gegeben über ihre Ordnung sowie über die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung (5) machen wir keinerlei Voraussetzungen. *Wir stellen uns in dieser Arbeit die Aufgabe, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen es von Null verschiedene Größen α_i derart gibt, daß in dem Bereiche*

$$|a_i^{(\nu)} - a_i| \leqq \alpha_i \qquad (\nu \geqq 0;\ i = 1, 2, \ldots,$$

die Kette (1) *konvergent ist.* Solche Ketten können wir als „nahezu periodische“[8]) bezeichnen. Aus der Lösung dieser Aufgabe ergeben sich

---

[6]) Perron I, S. 35.

[7]) Perron I, S. 38. Der Satz ist dort bewiesen, falls $a_r \neq 0$; nehmen wir an, $a_r = 0$, und zwar sei

$$\varrho_{k+1} = \varrho_{k+2} = \cdots = \varrho_{r-1} = \varrho_r = 0; \quad \varrho_k \neq 0 \qquad (k \geqq 1$$

Dann reduziert sich die Kette (4) auf:

$$(6) \qquad G_{\nu+k} + a_1 G_{\nu+k-1} + a_2 G_{\nu+k-2} + \ldots + a_k G_\nu = 0, \quad \text{wo} \quad a_k \neq 0,$$

und man erkennt leicht, daß

$$\frac{A_{\nu+r-k}^{(j+r-k)}}{A_{\nu+r-k-1}^{(r-1)}} = \frac{G_\nu^{(j)}}{G_{\nu-1}^{(k-1)}} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k-$$

und

$$\frac{A_\nu^{(s)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots; r-k-1$$

Hieraus und aus dem schon Bewiesenen folgt, da die Regularität der charakteristischen Gleichung von (4) die der von (6) nach sich zieht und umgekehrt, die Allgemeingültigkeit des Satzes.

[8]) Pringsheim, S. 65.

ıne weiteres wichtige Sätze über die Konvergenz limitärperiodischer etten.

Für Ketten erster Ordnung wurde die Existenz derartiger Konvergenzereiche erstmals von Herrn Perron[9]) dargetan unter den Voraustzungen, daß

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > 0.$$

Herr von Pidoll[10]) hat dasselbe Ergebnis auf andere Art hergeitet. Herr Pringsheim[11]) erwies im wesentlichen unter den gleichen oraussetzungen die Existenz derartiger Bereiche in besonders eleganter Veise. Die Untersuchungen von Herrn Szász[12]) ergaben Bereiche, welche lle bisher gewonnenen umfassen und insbesondere auch noch für $a_2 = 0$ eltung behalten. Vorliegende Arbeit sucht diese Ergebnisse auf Ketten eliebiger Ordnung auszudehnen, auch in dem Falle, daß $a_r = 0$ ist. Dabei urden die Arbeiten von Herrn Perron über die Poincarésche Differenzengleichung[13]) wesentlich benutzt.

§ 2.

Die Fälle, in denen keine Konvergenzbereiche existieren.

Wir können leicht die Fälle angeben, in denen keine Konvergenzereiche existieren. Wir wollen hierzu annehmen, die charakteristische leichung der periodischen Kette

$$1) \qquad A_{\nu+r}^{(j)} + a_1 A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2 A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r A_\nu^{(j)} = 0$$

ei nicht regulär; würden dann derartige Bereiche existieren, so gäbe es ewisse positive Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ derart, daß die Kette

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1^{(\nu)} A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2^{(\nu)} A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu)} A_\nu^{(j)} = 0, \quad |a_i^{(\nu)} - a_i| \leqq \alpha_i$$

nd also auch die Kette (1) konvergent wären; dies aber steht im Widerruch mit dem Hilfssatz 2; also gibt es in diesem Falle keine derartigen Konvergenzbereiche. Dasselbe gilt in dem trivialen Falle, daß sämtliche Wurzeln der charakteristischen Gleichung verschwinden.

Wir wollen nun annehmen, die charakteristische Gleichung von (1), ämlich

$$x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} x + a_r = 0$$

---

[9]) Perron V., S. 280 (§ 56).
[10]) von Pidoll, S. 36 (§ 3).
[11]) Pringsheim, S. 80 (§ 2).
[12]) Szász, S. 398.
[13]) Perron III und IV.

sei regulär und besitze eine *mehrfache* Hauptwurzel; bekanntlich sind ihr Koeffizienten

$$a_i = f_i(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r)$$

ganze rationale, also stetige Funktionen der Wurzeln; gäbe es hier solch Bereiche, so gehörten hierzu gewisse positive Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, un zu diesen also eine positive Größe δ derart, daß

$$|f_i(\varrho_1', \varrho_2', \ldots, \varrho_r') - f_i(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r)| \leqq \alpha_i, \tag{2}$$

sobald nur

$$|\varrho_k' - \varrho_k| < \delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, r$$

Wir könnten die Größen ϱ_k' außerdem noch so wählen, daß einerseits

$$|\varrho_k'| = |\varrho_k|$$

und andererseits

$$\varrho_k' \neq \varrho_h' \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, r)$$

Setzen wir noch

$$a_i' = f_i(\varrho_1', \varrho_2', \ldots, \varrho_r'),$$

so wäre demnach die Gleichung

$$x^r + a_1' x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1}' x + a_r' = 0$$

nicht regulär, und somit die zugehörige, periodische Kette

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1' A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2' A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r' A_\nu^{(j)} = 0$$

nicht konvergent, was sie doch wegen (2) sein müßte. Unsere Annahm führt also auf einen Widerspruch. Zusammenfassend erhalten wir den

Satz 1. *Besitzt die reinperiodische Kette*

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1 A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2 A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r A_\nu^{(j)} = 0$$

eine nichtreguläre charakteristische Gleichung oder aber eine reguläre charakteristische Gleichung mit mehrfacher Hauptwurzel, so existieren keine positiven Zahlen α_i derart, daß die Kette

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1^{(\nu)} A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2^{(\nu)} A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu)} A_\nu^{(j)} = 0$$

im ganzen Bereich

$$|a_i^{(\nu)} - a_i| \leqq \alpha_i \qquad (\nu \geqq 0;\ i = 1, 2, \ldots, r$$

konvergent ist.

Wir haben daher nur noch solche Ketten zu untersuchen, die eine reguläre, charakteristische Gleichung mit *einfacher* Hauptwurzel besitzen

§ 3.

Einführung zweckmäßiger Abkürzungen und Aufstellung der in den folgenden Paragraphen zu beweisenden Behauptung.

Wir betrachten also jetzt eine reinperiodische Kette

$$A_{\nu+r}^{(\nu)} + a_1 A_{\nu+r-1}^{(\nu)} + a_2 A_{\nu+r-2}^{(\nu)} + \ldots + a_r A_{\nu}^{(\nu)} = 0,$$

von der wir in diesem und allen folgenden Paragraphen nur voraussetzen, daß die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung

(1) $$x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} x + a_r = 0$$

die Bedingung erfüllen:

(2) $$|\varrho_1| > |\varrho_2| \geqq |\varrho_3| \geqq \ldots \geqq |\varrho_r|.$$

Im übrigen lassen wir auch zu, daß beliebig viele Wurzeln verschwinden. Wir setzen

$$x^r + a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} x + a_r$$
$$= (x - \varrho_1) \cdot (x^{r-1} + b_1 x^{r-2} + b_2 x^{r-3} + \ldots + b_{r-1}).$$

Hieraus folgt

(3) $$\begin{cases} a_1 = b_1 - \varrho_1, \\ a_i = b_i - \varrho_1 \cdot b_{i-1}, & (i = 2, 3, \ldots, r-1), \\ a_r = \quad - \varrho_1 \cdot b_{r-1}. \end{cases}$$

Hierin ist

(4) $$b_i = (-1)^i \cdot S_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

wobei S_i die Summe aller Produkte von je i Faktoren der Wurzeln $\varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_r$ bezeichnet.

Indem wir mit q eine beliebige, aber festgewählte Zahl des Intervalles

(5) $$\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right| < q < 1$$

und mit σ eine Zahl $\geqq 1$ bezeichnen, führen wir ein für allemal folgende Abkürzungen ein:

(6) $$\lambda_k = \prod_{\lambda=2}^{k+1} \left(1 - \frac{|\varrho_\lambda|}{|\varrho_1| q}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-1),$$

(6′) $$\lambda_0 = 1,$$

(7) $$m = \mathrm{Max}\left(1, \frac{|a_1|}{|\varrho_1|}, \frac{|a_2|}{|\varrho_1|^2}, \ldots, \frac{|a_{r-1}|}{|\varrho_1|^{r-1}}\right),$$

$$(8)\qquad \gamma = \frac{\lambda_{r-2}\cdot(1-q)}{\frac{(r-1)(1-q)-q(1-q^{r-1})}{(1-q)^2\cdot q^{r-1}}\cdot\left[(1-q)\frac{\lambda_{r-2}}{\lambda_{r-1}}+\frac{\sigma\cdot q}{\lambda_{r-1}}\cdot\prod_{\lambda=2}^{r}\left|1-\frac{\varrho_\lambda}{\varrho_1}\right|\right]\cdot\left[\frac{\lambda_{r-1}}{r\cdot q}+\frac{m}{q^{r-1}}\cdot(2-\right.}$$

$$(9)\qquad \alpha_i = \frac{1}{r}\cdot|\varrho_1|^i\cdot q^{i-1}\cdot\lambda_{r-1}\cdot\gamma \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

Wir wollen den Ausdruck für γ abschätzen; nun gilt für den erste Faktor im Nenner von γ:

$$(10)\qquad \frac{(r-1)(1-q)-q(1-q^{r-1})}{(1-q)^2\cdot q^{r-1}} = \frac{1}{q^{r-1}}+\left(\frac{1}{q^{r-2}}+\frac{1}{q^{r-1}}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{r-1}}\right)>1+2+3+\ldots+(r-1)\geqq 1.$$

Für die beiden Summanden in der ersten Klammer im Nenner gelten die Ungleichungen:

$$(1-q)\cdot\frac{\lambda_{r-2}}{\lambda_{r-1}}\geqq 1-q, \qquad \frac{\sigma\cdot q}{\lambda_{r-1}}\cdot\prod_{\lambda=2}^{r}\left|1-\frac{\varrho_\lambda}{\varrho_1}\right|\geqq q,$$

so daß

$$(1-q)\frac{\lambda_{r-2}}{\lambda_{r-1}}+\frac{\sigma\cdot q}{\lambda_{r-1}}\prod_{\lambda=2}^{r}\left|1-\frac{\varrho_\lambda}{\varrho_1}\right|\geqq 1.$$

Schließlich wird für den zweiten Summanden in der letzten Klammer im Nenner von γ:

$$\frac{(2-q)^{r-1}-1}{1-q} = \binom{r-1}{1}+\binom{r-1}{2}\cdot(1-q)+\binom{r-1}{3}\cdot(1-q)^2$$
$$+\ldots+(1-q)^{r-2}\geqq 1,$$

so daß aus (8) folgt:

$$(11)\qquad 0<\gamma<1-q<1.$$

Indem wir jetzt einzig und allein voraussetzen, daß die Wurzeln der Gleichung (1) *die Bedingung* (2) *erfüllen, behaupten wir, daß die Kette*

$$(12)\qquad A^{(j)}_{\nu+r}+(a_1+\alpha_1^{(\nu)})\cdot A^{(j)}_{\nu+r-1}+(a_2+\alpha_2^{(\nu)})\cdot A^{(j)}_{\nu+r-2}$$
$$+\ldots+(a_r+\alpha_r^{(\nu)})\cdot A^{(j)}_{\nu}=0,$$

worin

$$(13)\qquad |\alpha_i^{(\nu)}|\leqq\alpha_i \qquad (\nu\geqq 0;\ i=1,2,\ldots,r),$$

konvergent ist; die Zahlen α_i *sind dabei durch* (9) *definiert.*

Dem Beweise dieser Behauptung sind die §§ 4—12 gewidmet. Aus Zweckmäßigkeitsgründen werden wir von der Kette ausgehen:

$$(14)\qquad A^{(j)}_{\nu+r,\lambda}+(a_1+\alpha_1^{(\nu+\lambda)})\cdot A^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda}+(a_2+\alpha_2^{(\nu+\lambda)})\cdot A^{(j)}_{\nu+r-2,\lambda}$$
$$+\ldots+(a_r+\alpha_r^{(\nu+\lambda)})\cdot A^{(j)}_{\nu,\lambda}=0.$$

§ 4.

Eine nichtlineare Hilfsrekursionsformel.

Um die Richtigkeit unserer Behauptung zu erweisen, betrachten wir nächst die nichtlineare Hilfsrekursionsformel:

$$\gamma_{\nu+r-1} + \frac{b_1 \cdot \gamma_{\nu+r-2}}{\varrho_1 \cdot (1+\gamma_{\nu+r-2})} + \frac{b_2 \cdot \gamma_{\nu+r-3}}{\varrho_1^2 \cdot (1+\gamma_{\nu+r-2})(1+\gamma_{\nu+r-3})} + \cdots$$

$$+ \frac{b_{r-1} \cdot \gamma_\nu}{\varrho_1^{r-1} \cdot (1+\gamma_{\nu+r-2}) \cdots (1+\gamma_\nu)}$$

$$+ \frac{1}{\varrho_1}\left[\alpha_1^{(\nu)} + \frac{\alpha_2^{(\nu)}}{\varrho_1 \cdot (1+\gamma_{\nu+r-2})} + \frac{\alpha_3^{(\nu)}}{\varrho_1^2 \cdot (1+\gamma_{\nu+r-2})(1+\gamma_{\nu+r-3})} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_r^{(\nu)}}{\varrho_1^{r-1} \cdot (1+\gamma_{\nu+r-2}) \cdots (1+\gamma_\nu)}\right] = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Hierin sind die Zahlen $\alpha_i^{(\nu)}$ die in (12) und (14) § 3 auftretenden ößen, nämlich beliebige, aber festgewählte Zahlen des Intervalls

$$|\alpha_i^{(\nu)}| \leqq \alpha_i \qquad (\nu \geqq 0).$$

Die Rekursionsformel (1) läßt die Anfangswerte

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{r-2}$$

llkürlich. Wir wollen zeigen, daß bei geeigneter Wahl dieser Werte die eichung (1) eine bestimmte Zahlenfolge γ_ν definiert, für welche gilt:

$$|\gamma_\nu| \leqq \gamma \qquad (\nu \geqq 0).$$

Indem wir noch

$$\gamma_\nu^{(0)} = \gamma_\nu$$

tzen, erklären wir hierzu gewisse Größen $\gamma_{\nu+1}^{(k)}$ durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} \gamma_{\nu+1}^{(1)} = \gamma_{\nu+1}^{(0)} - \dfrac{\varrho_2}{\varrho_1 \cdot (1+\gamma_\nu)} \cdot \gamma_\nu^{(0)}, \\ \gamma_{\nu+1}^{(2)} = \gamma_{\nu+1}^{(1)} - \dfrac{\varrho_3}{\varrho_1 \cdot (1+\gamma_\nu)} \cdot \gamma_\nu^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{\nu+1}^{(r-1)} = \gamma_{\nu+1}^{(r-2)} - \dfrac{\varrho_r}{\varrho_1 \cdot (1+\gamma_\nu)} \cdot \gamma_\nu^{(r-2)}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} \gamma_{\nu+1}^{(1)} = \gamma_{\nu+1}^{(0)} - \dfrac{\varrho_2}{\varrho_1\cdot(1+\gamma_\nu)}\cdot\gamma_\nu^{(0)}, \\ \gamma_{\nu+2}^{(2)} = \gamma_{\nu+2}^{(0)} - \dfrac{\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_1\cdot(1+\gamma_{\nu+1})}\cdot\gamma_{\nu+1}^{(0)} + \dfrac{\varrho_2\cdot\varrho_3}{\varrho_1^2\cdot(1+\gamma_{\nu+1})(1+\gamma_\nu)}\cdot\gamma_\nu \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{\nu+r-1}^{(r-1)} = \gamma_{\nu+r-1}^{(0)} - \dfrac{\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_r}{\varrho_1\cdot(1+\gamma_{\nu+r-2})}\cdot\gamma_{\nu+r-2}^{(0)} \\ \qquad + - \ldots(-1)^{r-1}\dfrac{\varrho_2\cdot\varrho_3\cdot\ldots\cdot\varrho_r}{\varrho_1^{r-1}\cdot(1+\gamma_{\nu+r-2})\ldots(1+\gamma_\nu)}\cdot\gamma_\nu^{(0)}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (4) § 3 ergibt sich aus der letzten Gleichung u
aus (1):

$$(5)\quad \gamma_{\nu+r-1}^{(r-1)} = -\frac{1}{\varrho_1}\left[\alpha_1^{(\nu)} + \frac{\alpha_2^{(\nu)}}{\varrho_1\cdot(1+\gamma_{\nu+r-2})} + \frac{\alpha_3^{(\nu)}}{\varrho_1^2\cdot(1+\gamma_{\nu+r-2})(1+\gamma_{\nu+r-3})}\right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{\alpha_r^{(\nu)}}{\varrho_1^{r-1}\cdot(1+\gamma_{\nu+r-2})\ldots(1+\gamma_\nu)}\right]$$

Ferner folgt aus (3):

$$(6)\quad \gamma_{\nu+1}^{(k)} = \frac{\varrho_{k+2}}{\varrho_1(1+\gamma_\nu)}\gamma_\nu^{(k)} + \frac{\varrho_{k+3}}{\varrho_1(1+\gamma_\nu)}\gamma_\nu^{(k+1)} + \ldots + \frac{\varrho_r}{\varrho_1(1+\gamma_\nu)}\gamma_\nu^{(r-2)} + \gamma_{\nu+}^{(r-}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

Nehmen wir nun an, es gelten für irgendeine Zahl ν die Ungleichunge

$$(7)\quad |\gamma_\nu| \leqq \gamma,\ |\gamma_{\nu+1}| \leqq \gamma, \ldots, |\gamma_{\nu+r-2}| \leqq \gamma,\ |\gamma_{\nu+r-2}^{(k)}| \leqq \lambda_k\cdot\gamma$$
$$(k = 1, 2, \ldots, r-2),$$

so folgt zunächst aus (5) wegen (11) § 3:

$$|\gamma_{\nu+r-1}^{(r-1)}| \leqq \frac{1}{|\varrho_1|}\cdot\left[|\alpha_1^{(\nu)}| + \frac{|\alpha_2^{(\nu)}|}{|\varrho_1|\cdot q} + \frac{|\alpha_3^{(\nu)}|}{|\varrho_1|^2\cdot q^2} + \ldots + \frac{|\alpha_r^{(\nu)}|}{|\varrho_1|^{r-1}\cdot q^{r-1}}\right]$$

und hieraus erhält man wegen (2) unter Beachtung von (9) § 3:

$$|\gamma_{\nu+r-1}^{(r-1)}| \leqq \lambda_{r-1}\cdot\gamma.$$

Dann aber gilt nach (6):

$$|\gamma_{\nu+r-1}^{(k)}| \leqq \left(\frac{|\varrho_{k+2}|}{|\varrho_1|\cdot q}\lambda_k + \frac{|\varrho_{k+3}|}{|\varrho_1|\cdot q}\lambda_{k+1} + \ldots + \frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|\cdot q}\lambda_{r-2} + \lambda_{r-1}\right)\cdot\gamma$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, r-2)$$

und hieraus folgt nach (6) und (6′) § 3:

$$|\gamma_{\nu+r-1}^{(k)}| \leqq \lambda_k\cdot\gamma \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-2$$

iese Ungleichung besagt, daß unsere Annahmen (7) auch noch für $\nu+1$ eltung hätten; setzen wir jetzt:

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{r-2} = 0,$$

ergibt sich aus (4), daß auch

$$\gamma_{r-2}^{(k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-2)$$

nd somit sind unsere Annahmen für $\nu = 0$ tatsächlich erfüllt und daher ıch für alle $\nu \geqq 0$; insbesondere gilt:

$$|\gamma_\nu| \leqq \gamma \qquad (\nu \geqq 0).$$

ieraus und aus (11) § 3 ergibt sich, daß keiner der in (1) auftretenden enner verschwindet; wir erhalten also eine eindeutig bestimmte Zahlenfolge

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \gamma_{\nu+1}, \ldots \text{ ad inf.}$$

n dieser halten wir in der ganzen, vorliegenden Arbeit fest.

Zur Abkürzung setzen wir noch:

$$\varrho_1^{(\nu)} = \varrho_1 \cdot (1 + \gamma_\nu) \qquad (\nu \geqq 0).$$

ann ist

$$|\varrho_1^{(\nu)}| \geqq |\varrho_1| \cdot (1 - |\gamma_\nu|) \geqq |\varrho_1| \cdot (1 - \gamma) > |\varrho_1| \cdot q,$$
$$|\varrho_1^{(\nu)}| \leqq |\varrho_1| \cdot (1 + |\gamma_\nu|) \leqq |\varrho_1| \cdot (1 + \gamma) < |\varrho_1| \cdot (2 - q) \qquad (\nu \geqq 0).$$

Wir setzen jetzt:

$$\begin{cases} \vartheta_i^{(\nu)} = \dfrac{\alpha_i^{(\nu)}}{\varrho_1^{(\nu+r-i)}} + \dfrac{\alpha_{i+1}^{(\nu)}}{\varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \varrho_1^{(\nu+r-i-1)}} + \ldots + \dfrac{\alpha_r^{(\nu)}}{\varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \varrho_1^{(\nu+r-i-1)} \ldots \varrho_1^{(\nu)}} \\ \qquad\qquad (i = 2, 3, \ldots, r), \\ \pi_i^{(\nu)} = \dfrac{b_i}{\varrho_1^{(\nu+r-i-1)}} \cdot \gamma_{\nu+r-i-1} + \dfrac{b_{i+1}}{\varrho_1^{(\nu+r-i-1)} \cdot \varrho_1^{(\nu+r-i-2)}} \cdot \gamma_{\nu+r-i-2} + \ldots \\ \quad + \dfrac{b_{r-1}}{\varrho_1^{(\nu+r-i-1)} \cdot \varrho_1^{(\nu+r-i-2)} \ldots \varrho_1^{(\nu)}} \cdot \gamma_\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1). \end{cases}$$

ieraus folgt:

$$\begin{cases} \alpha_i^{(\nu)} = \varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \vartheta_i^{(\nu)} - \vartheta_{i+1}^{(\nu)}, \\ b_{i-1} \cdot \gamma_{\nu+r-i} = \varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \pi_{i-1}^{(\nu)} - \pi_i^{(\nu)} \end{cases} \qquad (i = 2, 3, \ldots, r-1).$$

ıßerdem sei

$$\beta_i^{(\nu)} = -\vartheta_{i+1}^{(\nu)} - \varrho_1 \cdot \pi_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

ann folgt aus (1) und (11):

$$\beta_1^{(\nu)} = -\vartheta_2^{(\nu)} - \varrho_1 \cdot \pi_1^{(\nu)} = \alpha_1^{(\nu)} + \varrho_1 \cdot \gamma_{\nu+r-1}$$

und aus (12):

$$(14') \quad \beta_i^{(\nu)} - \varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \beta_{i-1}^{(\nu)} = -\vartheta_{i+1}^{(\nu)} - \varrho_1 \cdot \pi_i^{(\nu)} + \varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \vartheta_i^{(\nu)} + \varrho_1 \cdot \varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \pi_i^{(\nu)}$$
$$= (\varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \vartheta_i^{(\nu)} - \vartheta_{i+1}^{(\nu)}) + \varrho_1 \cdot (\varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot \pi_{i-1}^{(\nu)} - \pi_i^{(\nu)})$$
$$= \alpha_i^{(\nu)} + \varrho_1 \cdot b_{i-1} \cdot \gamma_{\nu+r-i} \qquad (i = 2, 3, \ldots, r -$$

und schließlich aus (11):

$$(14'') \quad -\varrho_1^{(\nu)} \cdot \beta_{r-1}^{(\nu)} = \varrho_1^{(\nu)} \cdot \vartheta_r^{(\nu)} + \varrho_1 \cdot \varrho_1^{(\nu)} \cdot \pi_{r-1}^{(\nu)} = \alpha_r^{(\nu)} + \varrho_1 \cdot b_{r-1} \cdot \gamma_\nu.$$

Indem wir die Gleichung (14) mit der ersten Gleichung (3) § 3 un die Gleichungen (14′) und (14″) mit den entsprechenden anderen jen Systems kombinieren, erhalten wir nach leichter Rechnung:

$$(15) \quad \begin{cases} a_1 + \alpha_1^{(\nu)} = (b_1 + \beta_1^{(\nu)}) - \varrho_1^{(\nu+r-1)}, \\ a_i + \alpha_i^{(\nu)} = (b_i + \beta_i^{(\nu)}) - \varrho_1^{(\nu+r-i)} \cdot (b_{i-1} + \beta_{i-1}^{(\nu)}) \quad (i = 2, 3, \ldots, r-1 \\ a_r + \alpha_r^{(\nu)} = \qquad\qquad - \varrho_1^{(\nu)} \cdot (b_{r-1} + \beta_{r-1}^{(\nu)}). \end{cases}$$

Eine auf reinperiodische Ketten sich beziehende Bemerkung sei hi noch angefügt; bei diesen ist

$$\alpha_i^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu \geqq 0$$

Bei unserer Wahl der Anfangswerte von γ_ν folgt aus (1):

$$\gamma_\nu = 0 \qquad (\nu \geqq 0$$

und aus (9):

$$\varrho_1^{(\nu)} = \varrho_1 \qquad (\nu \geqq 0$$

und somit aus (13) im Hinblick auf (11):

$$\beta_i^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu \geqq 0$$

so daß also das System (15) mit dem System (3) § 3 identisch wird.

§ 5.

Ein Hilfssatz über limitärperiodische Ketten.

Wir wollen jetzt zeigen, daß aus der Annahme:

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_i^{(\nu)} = 0$$

die Beziehung folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \gamma_\nu = 0.$$

Zunächst ist nämlich wegen (5) und (10) § 4

$$\lim_{\nu=\infty} \gamma_{\nu+r-1}^{(r-1)} = 0.$$

lso mit Rücksicht auf die letzte Gleichung (3) § 4:

1) $$\lim_{\nu=\infty}\left(\gamma_{\nu+1}^{(r-2)}-\frac{\varrho_r}{\varrho_1(1+\gamma_\nu)}\gamma_\nu^{(r-2)}\right)=0.$$

st nun ε_0 eine beliebig kleine, positive Zahl, so gibt es also eine Zahl ν_0 erart, daß

$$\left|\gamma_{\nu+1}^{(r-2)}-\frac{\varrho_r}{\varrho_1\cdot(1+\gamma_\nu)}\cdot\gamma_\nu^{(r-2)}\right|<\varepsilon_0 \qquad (\nu\geqq\nu_0).$$

lso gilt auch:

$$|\gamma_{\nu+1}^{(r-2)}|-\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1(1+\gamma_\nu)|}|\gamma_\nu^{(r-2)}|<\varepsilon_0 \qquad (\nu\geqq\nu_0)$$

nd hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (9) und (10) § 4, daß

$$|\gamma_{\nu+1}^{(r-2)}|<\varepsilon_0+\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|\cdot q}\cdot|\gamma_\nu^{(r-2)}| \qquad (\nu\geqq\nu_0).$$

omit gilt:

$$|\gamma_{\nu_0+\mu}^{(r-2)}|<\varepsilon_0+\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}\cdot\varepsilon_0+\left(\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}\right)^2\cdot\varepsilon_0+\ldots+\left(\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}\right)^{\mu-1}\cdot\varepsilon_0+\left(\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}\right)^{\mu}\cdot|\gamma_{\nu_0}^{(r-2)}|.$$

Jun ist nach (5) § 3

$$\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}<1$$

nd daher dürfen wir schreiben:

2) $$|\gamma_{\nu_0+\mu}^{(r-2)}|<\varepsilon_0\cdot\left(1+\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}+\left(\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}\right)^2+\ldots\right)+\left(\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}\right)^{\mu}\cdot|\gamma_{\nu_0}^{(r-2)}|$$
$$=\frac{\varepsilon_0}{1-\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}}+\left(\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|\cdot q}\right)^{\mu}\cdot|\gamma_{\nu_0}^{(r-2)}|.$$

Vir geben jetzt eine beliebig kleine, positive Größe δ vor und setzen

3) $$\varepsilon_0=\frac{\delta}{2}\left(1-\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|\cdot q}\right).$$

Hierzu gehört ein Index ν_0; wir wählen dann noch eine Zahl μ_0 so, daß ür $\mu\geqq\mu_0$

$$\left(\frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|q}\right)^{\mu}\cdot|\gamma_{\nu_0}^{(r-2)}|\leqq\frac{\delta}{2}.$$

Dann folgt aus (2), (3) und hieraus, daß

$$|\gamma_\nu^{(r-2)}|<\delta \qquad (\nu\geqq\nu_0+\mu_0).$$

Mit anderen Worten:

$$\lim_{\nu=\infty}\gamma_\nu^{(r-2)}=0.$$

Hieraus folgt weiter wegen (3) § 4, daß

$$\lim_{\nu=\infty}\left(\gamma_{\nu+1}^{(r-3)}-\frac{\varrho_{r-1}}{\varrho_1(1+\gamma_\nu)}\cdot\gamma_\nu^{(r-3)}\right)=0$$

und daraus schließen wir in ähnlicher Weise wie soeben, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \gamma_\nu^{(r-3)} = 0.$$

So fortfahrend erkennen wir schließlich, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \gamma_\nu = 0,$$

und aus (9) § 4 ergibt sich dann, daß auch

$$\lim_{\nu=\infty} \varrho_1^{(\nu)} = \varrho_1,$$

woraus unter Beachtung von (11) und (13) § 4 noch folgt, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \beta_i^{(\nu)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1$$

Diese Ergebnisse fassen wir zusammen in dem

Hilfssatz. *Wenn die Größen $\alpha_i^{(\nu)}$ außer der Bedingung* (2) § *noch die folgende erfüllen:*

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_i^{(\nu)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r$$

so folgt bei unserer Wahl der Anfangswerte von γ_ν, daß auch

$$\lim_{\nu=\infty} \gamma_\nu = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \varrho_1^{(\nu)} = \varrho_1, \quad \lim_{\nu=\infty} \beta_i^{(\nu)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r-1)$$

§ 6.

Transformation der gegebenen Kette in eine äquivalente.

Wir knüpfen an die Kette (14) § 3 an, nämlich:

$$(1) \quad A^{(j)}_{\nu+r,\lambda} + (a_1 + \alpha_1^{(\nu+\lambda)}) \cdot A^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda} + (a_2 + \alpha_2^{(\nu+\lambda)}) \cdot A^{(j)}_{\nu+r-2,\lambda} + \ldots$$
$$+ (a_r + \alpha_r^{(\nu+\lambda)}) \cdot A^{(j)}_{\nu,\lambda} = 0, \quad |\alpha_i^{(\nu)}| \leqq \alpha_i.$$

Auf sie wenden wir folgende Transformation an:

$$(2) \qquad A^{(j)}_{\nu,\lambda} = h_{j,\lambda} \cdot \varrho_1^{(\lambda-1)} \cdot \varrho_1^{(\lambda)} \ldots \varrho_1^{(\lambda+\nu-1)} \cdot B^{(j)}_{\nu,\lambda},$$

wobei

$$h_{j,\lambda} = \frac{1}{\varrho_1^{(\lambda-1)} \cdot \varrho_1^{(\lambda)} \ldots \varrho_1^{(\lambda+j-1)}}, \qquad \varrho^{(-1)} = 1.$$

Hieraus folgt, daß

$$B^{(j)}_{\nu,\lambda} \begin{cases} = 1 & \text{für } j = \nu \\ = 0 & \text{für } j \neq \nu \end{cases} \qquad (j, \nu = 0, 1, 2, \ldots, r-1).$$

urch Substitution von (2) in (1) ergibt sich:

$$B^{(j)}_{\nu+r,\lambda} + \frac{a_1+\alpha_1^{(\nu+\lambda)}}{\varrho_1^{(\lambda+\nu+r-1)}} B^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda} + \frac{a_2+\alpha_2^{(\nu+\lambda)}}{\varrho_1^{(\lambda+\nu+r-1)}\cdot\varrho_1^{(\lambda+\nu+r-2)}} B^{(j)}_{\nu+r-2,\lambda} + \dots$$

$$+ \frac{a_r+\alpha_r^{(\nu+\lambda)}}{\varrho_1^{(\lambda+\nu+r-1)}\dots\varrho_1^{(\lambda+\nu)}} B^{(j)}_{\nu,\lambda} = 0.$$

tzen wir jetzt

$$q_i^{(\nu)} = \frac{a_i+\alpha_i^{(\nu)}}{\varrho_1^{(\nu+r-1)}\cdot\varrho_1^{(\nu+r-2)}\dots\varrho_1^{(\nu+r-i)}} \qquad (i=1,2,\dots,r),$$

erhalten wir die Kette in der Form:

$$B^{(j)}_{\nu+r,\lambda} + q_1^{(\nu+\lambda)}\cdot B^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda} + q_2^{(\nu+\lambda)}\cdot B^{(j)}_{\nu+r-2,\lambda} + \dots + q_r^{(\nu+\lambda)}\cdot B^{(j)}_{\nu,\lambda} = 0.$$

lgemein wollen wir die Integrale dieser Gleichung mit $D_{\nu,\lambda}$ bezeichnen, daß wir die Differenzengleichung erhalten:

$$D_{\nu+r,\lambda} + q_1^{(\nu+\lambda)}\cdot D_{\nu+r-1,\lambda} + q_2^{(\nu+\lambda)}\cdot D_{\nu+r-2,\lambda} + \dots + q_r^{(\nu+\lambda)}\cdot D_{\nu,\lambda} = 0.$$

Aus (2) ergibt sich nach leichter Rechnung die Relation:

$$\frac{A^{(j)}_{\nu,\lambda}}{A^{(r-1)}_{\nu-1,\lambda+1}} = \varrho_1^{(\lambda+j)}\cdot\varrho_1^{(\lambda+j+1)}\dots\varrho_1^{(\lambda+r-1)}\cdot\frac{B^{(j)}_{\nu,\lambda}}{B^{(r-1)}_{\nu-1,\lambda+1}}$$

$$(j=0,1,2,\dots,r-1).$$

eraus schließen wir, daß die Konvergenz der Kette (1) jene der Kette) bedingt und umgekehrt; wir nennen die Ketten (1) und (4) mit- nander äquivalent.

§ 7.

Aufstellung eines Systems von Integralen.

Wir wollen jetzt den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (5) § 6, mlich

$$D_{\nu+r,\lambda} + q_1^{(\nu+\lambda)}\cdot D_{\nu+r-1,\lambda} + q_2^{(\nu+\lambda)}\cdot D_{\nu+r-2,\lambda} + \dots + q_r^{(\nu+\lambda)}\cdot D_{\nu,\lambda} = 0$$

nformen; hierzu definieren wir:

$$p_i^{(\nu)} = \frac{b_i+\beta_i^{(\nu)}}{\varrho_1^{(\nu+r-1)}\cdot\varrho_1^{(\nu+r-2)}\dots\varrho_1^{(\nu+r-i)}} \qquad (i=1,2,\dots,r-1).$$

enn wir jetzt die Gleichungen (15) § 4 bzw. mit

$$\frac{1}{\varrho_1^{(\nu+r-1)}},\dots,\frac{1}{\varrho_1^{(\nu+r-1)}\cdot\varrho_1^{(\nu+r-2)}\dots\varrho_1^{(\nu+r-i)}},\dots,\frac{1}{\varrho_1^{(\nu+r-1)}\cdot\varrho_1^{(\nu+r-2)}\dots\varrho_1^{(\nu)}}$$

ltiplizieren, ergibt sich also unter Berücksichtigung von (3) § 6 das eichungssystem:

$$(3)\qquad \begin{cases} q_1^{(\nu)} = p_1^{(\nu)} - 1, \\ q_i^{(\nu)} = p_i^{(\nu)} - p_{i-1}^{(\nu)}, & (i = 2, 3, \ldots, r- \\ q_r^{(\nu)} = - p_{r-1}^{(\nu)}, \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir die Identität:

$$(4)\quad D_{\nu+r,\lambda} + q_1^{(\nu+\lambda)} \cdot D_{\nu+r-1,\lambda} + q_2^{(\nu+\lambda)} \cdot D_{\nu+r-2,\lambda} + \ldots + q_r^{(\nu+\lambda)} \cdot D_{\nu,\lambda}$$
$$= (D_{\nu+r,\lambda} - D_{\nu+r-1,\lambda}) + p_1^{(\nu+\lambda)} \cdot (D_{\nu+r-1,\lambda} - D_{\nu+r-2,\lambda})$$
$$+ p_2^{(\nu+\lambda)} \cdot (D_{\nu+r-2,\lambda} - D_{\nu+r-3,\lambda}) + \ldots + p_{r-1}^{(\nu+\lambda)} \cdot (D_{\nu+1,\lambda} - D_{\nu,\lambda}),$$

und hieraus ergibt sich für jedes Integral von (1) die Beziehung:

$$(5)\qquad D_{\nu+1,\lambda} - D_{\nu,\lambda} = C_{\nu,\lambda},$$

wobei $C_{\nu,\lambda}$ ein Integral der Gleichung

$$(6)\quad C_{\nu+r-1,\lambda} + p_1^{(\nu+\lambda)} \cdot C_{\nu+r-2,\lambda} + p_2^{(\nu+\lambda)} \cdot C_{\nu+r-3,\lambda} + \ldots + p_{r-1}^{(\nu+\lambda)} \cdot C_{\nu,\lambda} =$$

darstellt; und umgekehrt: Ist von gewissen Größen $D_{\nu,\lambda}$ nur bekan daß sie der Relation (5) genügen — unter $C_{\nu,\lambda}$ dabei wieder ein Integ von (6) verstanden —, so ergibt sich durch Einsetzen von (5) in (mit Rücksicht auf (4), daß $D_{\nu,\lambda}$ ein Integral von (1) sein muß.

Da nun $C_{\nu,\lambda} = 0$ ein Integral von (6) ist, ist also auch

$$(7)\qquad D_{\nu,\lambda} = 1 \qquad (\nu \geqq$$

ein Integral von (1).

Bezeichnen wir weiter mit $C_{\nu,\lambda}^{(j)}$ Integrale von (6) mit den Anfang werten:

$$(8)\qquad \begin{cases} C_{\nu,\lambda}^{(j)} = 1 \quad \text{für} \quad j = \nu \\ C_{\nu,\lambda}^{(j)} = 0 \quad \text{für} \quad j \neq \nu \end{cases} \qquad (j, \nu = 0, 1, 2, \ldots, r - 2$$

so stellen auch die Größen $S_{\nu,\lambda}^{(j)}$, welche definiert sind durch die Gleichunge

$$S_{0,\lambda}^{(j)} = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r - 2$$
$$S_{\nu,\lambda}^{(j)} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} C_{\mu,\lambda}^{(j)} \qquad (\nu \geqq$$

Integrale von (1) dar. Andererseits sind, da die Größen $B_{\nu,\lambda}^{(j)}$ Integra von (1) sind, auch deren Summen:

$$T_{\nu,\lambda}^{(j)} = \sum_{s=j+1}^{r-1} B_{\nu,\lambda}^{(s)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r - 2$$

Integrale von (1). Nun erkennt man leicht, daß die Anfangswerte de Integrals $T_{\nu,\lambda}^{(j)}$ mit denen des Integrals $S_{\nu,\lambda}^{(j)}$ übereinstimmen; da nun di

ntegrale eindeutig durch ihre Anfangswerte bestimmt sind, gilt deshalb llgemein:

$$\sum_{s=j+1}^{r-1} B_{\nu,\lambda}^{(s)} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} C_{\mu,\lambda}^{(j)} \quad (\nu \geqq 1;\ j = 0, 1, 2, \ldots, r-2),$$

nd hieraus folgt für $j = r-2$:

9) $$B_{\nu,\lambda}^{(r-1)} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} C_{\mu,\lambda}^{(r-2)} \qquad (\nu \geqq 1);$$

odann allgemein:

10) $$B_{\nu,\lambda}^{(j)} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} C_{\mu,\lambda}^{(j-1)} - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} C_{\mu,\lambda}^{(j)} \quad (\nu \geqq 1;\ j = 1, 2, \ldots, r-2).$$

Es ist unsere Absicht, die Integrale $B_{\nu,\lambda}^{(j)}$ linear durch ein anderes, weckmäßigeres System von Integralen auszudrücken; hierfür ist die Konergenz der Reihen

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\nu+\mu,\lambda}^{(j)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-2)$$

on ausschlaggebender Bedeutung; diese werden wir im § 11 erweisen; n den §§ 8, 9, 10 werden wir hierzu einige Hilfsformeln herleiten; im 12 werden wir die hier abbrechende Entwicklung wieder aufnehmen.

§ 8.

Einige auf den reinperiodischen Fall sich beziehende Hilfsformeln.

Wir wenden nun die Definitionen und Formeln der §§ 6 und 7 auf ie reinperiodische Kette

1) $$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1 A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2 A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r A_{\nu}^{(j)} = 0$$

n; hierzu haben wir die Schlußbemerkung des § 4 zu beachten; indem ir wegen (3) § 1 den unteren Index λ zur Kennzeichnung der Integrale ier unterdrücken, erhalten wir zunächst die zu (1) äquivalente Kette in er Form:

2) $$B_{\nu+r}^{(j)} + q_1 \cdot B_{\nu+r-1}^{(j)} + q_2 \cdot B_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + q_r \cdot B_{\nu}^{(j)} = 0.$$

arin ist

3) $$q_i = \frac{a_i}{\varrho_1^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

ezeichnen wir allgemein das Integral von (2) mit Δ_ν, so erhalten wir ie Differenzengleichung:

4) $$\Delta_{\nu+r} + q_1 \cdot \Delta_{\nu+r-1} + q_2 \cdot \Delta_{\nu+r-2} + \ldots + q_r \cdot \Delta_\nu = 0.$$

Setzen wir auch noch:

$$p_i = \frac{b_i}{\varrho_1^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1) \tag{5}$$

so folgt aus (3) § 3 das System:

$$\begin{cases} q_1 = p_1 - 1, \\ q_i = p_i - p_{i-1}, \\ q_r = \quad - p_{r-1}. \end{cases} \qquad (i = 2, 3, \ldots, r-1) \tag{6}$$

Hieraus ergibt sich die Identität:

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu+r} + q_1 \cdot \Delta_{\nu+r-1} + q_2 \cdot \Delta_{\nu+r-2} + \ldots + q_r \cdot \Delta_\nu &= (\Delta_{\nu+r} - \Delta_{\nu+r-1}) \\ &+ p_1 \cdot (\Delta_{\nu+r-1} - \Delta_{\nu+r-2}) + p_2 \cdot (\Delta_{\nu+r-2} - \Delta_{\nu+r-3}) + \ldots \\ &+ p_{r-1} \cdot (\Delta_{\nu+1} - \Delta_\nu). \end{aligned} \tag{7}$$

Jede Funktion Δ_ν von ν, von der uns nur bekannt ist, daß sie der Relation

$$\Delta_{\nu+1} - \Delta_\nu = \Gamma_\nu \tag{8}$$

genügt, worin Γ_ν ein Integral der Gleichung

$$\Gamma_{\nu+r-1} + p_1 \cdot \Gamma_{\nu+r-2} + p_2 \Gamma_{\nu+r-3} + \ldots + p_{r-1} \Gamma_\nu = 0 \tag{9}$$

bedeutet, ist also ein Integral von (4).

$\Gamma_\nu^{(j)}$ seien Integrale von (9) mit den Anfangswerten:

$$\begin{cases} \Gamma_\nu^{(j)} = 1 & \text{für } j = \nu \\ \Gamma_\nu^{(j)} = 0 & \text{für } j \neq \nu \end{cases} \qquad (j, \nu = 0, 1, 2, \ldots, r-2) \tag{10}$$

Entsprechend (3) § 1 ist auch hier:

$$\Gamma_{\nu,\lambda}^{(j)} = \Gamma_\nu^{(j)} \qquad (\nu, \lambda \geqq 0;\ j = 0, 1, 2, \ldots, r-2) \tag{10'}$$

Zwischen diesen Integralen und den Koeffizienten von (9) bestehen einfache Relationen; um sie abzuleiten, bemerken wir zunächst, daß wegen (4) § 3 und (5) die Identität besteht:

$$1 + p_1 \zeta + p_2 \zeta^2 + \ldots + p_{r-1} \zeta^{r-1} = \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\zeta\right) \cdot \left(1 - \frac{\varrho_3}{\varrho_1}\zeta\right) \ldots \left(1 - \frac{\varrho_r}{\varrho_1}\zeta\right). \tag{11}$$

Nun entwickeln wir die rationalen Funktionen:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^{j+1} + p_1 \cdot \zeta^{j+2} + \ldots + p_{r-j-2} \cdot \zeta^{r-1}}{1 + p_1 \cdot \zeta + \ldots + p_{r-1} \cdot \zeta^{r-1}} &= \delta_0^{(j)} \cdot \zeta + \delta_1^{(j)} \cdot \zeta^2 + \delta_2^{(j)} \cdot \zeta^3 \\ &+ \ldots + \delta_\nu^{(j)} \cdot \zeta^{\nu+1} + \ldots \end{aligned} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-2;\ p_0 = 1) \tag{12}$$

nach Potenzen von ζ. Die im Endlichen gelegenen, singulären Punkte dieser Funktionen sind die Nullpunkte ihres Nenners, nämlich die Werte

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_j} \qquad (\varrho_j \neq 0)$$

Wegen (2) § 3 ist also der Konvergenzradius > 1.

Nun ist nach (12):

$$\zeta^{j+1} + p_1 \cdot \zeta^{j+2} + p_2 \cdot \zeta^{j+3} + \ldots + p_{r-j-2}\,\zeta^{r-1}$$
$$= (1 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \ldots + p_{r-1}\cdot\zeta^{r-1}) \cdot (\delta_0^{(j)} \cdot \zeta + \delta_1^{(j)} \cdot \zeta^2 + \delta_2^{(j)} \cdot \zeta^3 + \ldots)$$

ıd durch Koeffizientenvergleichung folgt, daß der allgemeine Reihen-
›effizient $\delta_\nu^{(j)}$ mit dem Integral $\Gamma_\nu^{(j)}$ identisch ist. Da der Konvergenz-
dius > 1 ist, konvergieren die Reihen auch noch für $\zeta = 1$ und wir
halten:

3) $$\frac{1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-j-2}}{1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Gamma_\nu^{(j)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

Hieraus ergibt sich sofort die Konvergenz der Reihen:

$$-\sum_{\mu=0}^{\infty} \Gamma_{\nu+\mu}^{(j)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

a diese, als Funktionen von ν aufgefaßt, der Relation (8) genügen, sind
e Integrale von (4); deshalb bezeichnen wir sie mit $\Delta_\nu^{(j)}$, so daß gilt:

$$\Delta_\nu^{(j)} = -\sum_{\mu=0}^{\infty} \Gamma_{\nu+\mu}^{(j)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

ie Größen $\Delta_{\nu,\lambda}^{(j)}$ erklären wir durch die Gleichungen:

4) $$\Delta_{\nu,\lambda}^{(j)} = -\sum_{\mu=0}^{\infty} \Gamma_{\nu+\mu,\lambda}^{(j)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-2),$$

daß wegen (10′):

5) $$\Delta_{\nu,\lambda}^{(j)} = \Delta_\nu^{(j)} \qquad (\nu, \lambda \geqq 0;\ j = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

ann folgt aus (13):

6) $$\Delta_0^{(j+1)} - \Delta_0^{(j)} = \frac{p_{r-j-2}}{1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1}} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-3),$$

6′) $$-\Delta_0^{(r-2)} = \frac{1}{1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1}}.$$

§ 9.

Abschätzung des Ausdrucks:

$$\frac{|p_1^{(\nu)} - p_1|}{q} + \frac{|p_2^{(\nu)} - p_2|}{q^2} + \ldots + \frac{|p_{r-1}^{(\nu)} - p_{r-1}|}{q^{r-1}}.$$

Wir knüpfen an die Gleichungen (3) § 7 und (6) § 8 an; aus diesen
lgt:

$$^{(\nu)} - p_i = q_1^{(\nu)} - q_1 + q_2^{(\nu)} - q_2 + \ldots + q_i^{(\nu)} - q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

und hieraus:

$$(1)\quad \frac{|p_1^{(\nu)}-p_1|}{q}+\frac{|p_2^{(\nu)}-p_2|}{q^2}+\ldots+\frac{|p_i^{(\nu)}-p_i|}{q^i}+\ldots+\frac{|p_{r-1}^{(\nu)}-p_{r-1}|}{q^{r-1}}$$
$$\leqq |q_1^{(\nu)}-q_1|\cdot\left[\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{r-1}}\right]+\ldots$$
$$+|q_i^{(\nu)}-q_i|\cdot\left[\frac{1}{q^i}+\frac{1}{q^{i-1}}+\ldots+\frac{1}{q^{r-1}}\right]+\ldots+|q_{r-1}^{(\nu)}-q_{r-1}|\frac{1}{q^{r-1}}.$$

Wir wollen nun die Größen $|q_i^{(\nu)}-q_i|$ für $i=1,2,\ldots,r-1$ schätzen; es ist

$$q_i^{(\nu)}-q_i=\frac{a_i+\alpha_i^{(\nu)}}{\varrho_1^{(\nu+r-1)}\cdot\varrho_1^{(\nu+r-2)}\cdots\varrho_1^{(\nu+r-i)}}-\frac{a_i}{\varrho_1^i}$$
$$=\frac{\alpha_i^{(\nu)}-a_i[(1+\gamma_{\nu+r-1})\cdot(1+\gamma_{\nu+r-2})\cdots(1+\gamma_{\nu+r-i})-1]}{\varrho_1^i\cdot(1+\gamma_{\nu+r-1})\cdot(1+\gamma_{\nu+r-2})\cdots(1+\gamma_{\nu+r-i})}.$$

Hieraus folgern wir mit Rücksicht auf (8) § 4:

$$|q_i^{(\nu)}-q_i|\leqq\frac{|\alpha_i^{(\nu)}|}{|\varrho_1|^i\cdot(1-\gamma)^i}+\frac{|a_i|}{|\varrho_1|^i}\cdot\frac{(1+\gamma)^i-1}{\gamma\cdot(1-\gamma)^i}\cdot\gamma.$$

Also kommt im Hinblick auf (7), (11) und (13) § 3:

$$|q_i^{(\nu)}-q_i|<\frac{\alpha_i}{|\varrho_1|^i\cdot q^i}+\frac{m}{q^{r-1}}\cdot\frac{(2-q)^{r-1}-1}{1-q}\gamma$$

und wegen (9) § 3:

$$|q_i^{(\nu)}-q_i|<\left[\frac{\lambda_{r-1}}{r\cdot q}+\frac{m}{q^{r-1}}\cdot\frac{(2-q)^{r-1}-1}{1-q}\right]\cdot\gamma.$$

Da nun der Ausdruck rechts vom Index i unabhängig ist, folgt ab wegen (10) § 3 aus (1), daß

$$\frac{|p_1^{(\nu)}-p_1|}{q}+\frac{|p_2^{(\nu)}-p_2|}{q^2}+\ldots+\frac{|p_{r-1}^{(\nu)}-p_{r-1}|}{q^{r-1}}$$
$$<\left(\frac{\lambda_{r-1}}{r\cdot q}+\frac{m}{q^{r-1}}\cdot\frac{(2-q)^{r-1}-1}{1-q}\right)\cdot\frac{(r-1)(1-q)-q\cdot(1-q^{r-1})}{q^{r-1}\cdot(1-q)^2}\cdot\gamma$$

Hieraus ergibt sich nach (8) § 3 unsere Abschätzungsformel:

$$(2)\quad \frac{|p_1^{(\nu)}-p_1|}{q}+\frac{|p_2^{(\nu)}-p_2|}{q^2}+\ldots+\frac{|p_{r-1}^{(\nu)}-p_{r-1}|}{q^{r-1}}$$
$$<\frac{(1-q)\cdot\lambda_{r-2}\cdot\lambda_{r-1}}{(1-q)\cdot\lambda_{r-2}+\sigma\cdot q\cdot\prod_{\lambda=2}^{r}\left|1-\frac{\varrho_\lambda}{\varrho_1}\right|}$$

§ 10.

Abschätzung der Integrale $\Gamma_\nu^{(j)}$.

Wir wollen jetzt noch die Integrale $\Gamma_\nu^{(j)}$ abschätzen; indem wir setzen:

$$\Gamma_\nu^{(j)\,0} = \Gamma_\nu^{(j)},$$

finieren wir hierzu gewisse Größen $\Gamma_{\nu+1}^{(j)\,k}$ durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,1} = \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,0} - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\cdot\Gamma_\nu^{(j)\,0}, \\ \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,2} = \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,1} - \frac{\varrho_3}{\varrho_1}\cdot\Gamma_\nu^{(j)\,1}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,r-1} = \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,r-2} - \frac{\varrho_r}{\varrho_1}\cdot\Gamma_\nu^{(j)\,r-2}. \end{array}\right.$$

eraus folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,1} = \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,0} - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\cdot\Gamma_\nu^{(j)\,0}, \\ \Gamma_{\nu+2}^{(j)\,2} = \Gamma_{\nu+2}^{(j)\,0} - \frac{\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_1}\Gamma_{\nu+1}^{(j)\,0} + \frac{\varrho_2\cdot\varrho_3}{\varrho_1^2}\Gamma_\nu^{(j)\,0}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_{\nu+r-1}^{(j)\,r-1} = \Gamma_{\nu+r-1}^{(j)\,0} - \frac{\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_r}{\varrho_1}\Gamma_{\nu+r-2}^{(j)\,0} \\ \qquad + - \ldots + (-1)^{r-1}\frac{\varrho_2\cdot\varrho_3\cdots\varrho_r}{\varrho_1^{r-1}}\Gamma_\nu^{(j)\,0}. \end{array}\right.$$

s der letzten Gleichung ergibt sich wegen (9) § 8, daß

$$\Gamma_{\nu+r-1}^{(j)\,r-1} = 0 \qquad (\nu \geqq 0).$$

rner folgt aus (1), daß

$$\Gamma_{\nu+1}^{(j)\,k} = \frac{\varrho_{k+2}}{\varrho_1}\cdot\Gamma_\nu^{(j)\,k} + \frac{\varrho_{k+3}}{\varrho_1}\cdot\Gamma_\nu^{(j)\,k+1} + \ldots + \frac{\varrho_r}{\varrho_1}\Gamma_\nu^{(j)\,r-2} + \Gamma_{\nu+1}^{(j)\,r-1}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

tzen wir

$$G_j = \frac{1}{\lambda_{r-2}}\cdot\mathrm{Max}\left(1, |\Gamma_{r-2}^{(j)\,0}|, |\Gamma_{r-2}^{(j)\,1}|, \ldots, |\Gamma_{r-2}^{(j)\,r-2}|\right) \geqq 1$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, r-2)$$

d beachten, daß nach (2):

$$\Gamma_{r-2}^{(r-2)\,0} = \Gamma_{r-2}^{(r-2)\,1} = \Gamma_{r-2}^{(r-2)\,2} = \ldots = \Gamma_{r-2}^{(r-2)\,r-2} = 1,$$

ergibt sich insbesondere, daß

$$G_{r-2} = \frac{1}{\lambda_{r-2}}.$$

und ferner folgt aus (5), daß

$$|\Gamma_{r-2}^{(j)k}| \leqq G_j \cdot \lambda_{r-2} \leqq G_j \cdot \lambda_k = G_j \cdot \lambda_k \cdot q^0 \tag{7}$$
$$(j, k = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

Nehmen wir nun an, es gelten für irgendeine Zahl ν die Ungleichungen

$$|\Gamma_{\nu+r-2}^{(j)k}| \leqq G_j \cdot \lambda_k \cdot q^\nu \qquad (j, k = 0, 1, 2, \ldots, r-2) \tag{8}$$

so folgt aus (4) mit Rücksicht auf (3):

$$|\Gamma_{\nu+r-1}^{(j)k}| < G_j \cdot \left(\frac{|\varrho_{k+2}|}{|\varrho_1| \cdot q} \cdot \lambda_k + \frac{|\varrho_{k+3}|}{|\varrho_1| \cdot q} \cdot \lambda_{k+1} + \ldots + \frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1| \cdot q} \lambda_{r-2} + \lambda_{r-1} \right) \cdot q^{\nu+1}$$

und hieraus ergibt sich unter Beachtung von (6) und (6′) § 3, daß

$$|\Gamma_{\nu+r-1}^{(j)k}| < G_j \cdot \lambda_k \cdot q^{\nu+1}.$$

Man ersieht also, daß unsere Annahmen auch noch für $\nu+1$ Geltung hätten; da diese nun wegen (7) für $\nu = 0$ tatsächlich erfüllt sind, sind sie allgemein richtig, so daß gilt:

$$|\Gamma_{\nu+r-2}^{(j)k}| < G_j \cdot \lambda_k \cdot q^\nu \qquad (\nu \geqq 1)$$

Insbesondere ist

$$|\Gamma_{\nu+r-2}^{(j)}| < G_j \cdot q^\nu \qquad (\nu \geqq 1)$$

Also wegen (10′) § 8 auch:

$$|\Gamma_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)}| < G_j \cdot q^\nu \qquad (\nu \geqq 1) \tag{9}$$

§ 11.

Die Konvergenz der Reihen $\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\nu+\mu,\lambda}^{(j)}$.

Wir erweisen jetzt die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\nu+\mu,\lambda}^{(j)} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-2)$$

Zu diesem Zwecke beachten wir, daß aus (6) § 7 und (9) § 8 die Gleichung folgt:

$$(C_{\nu+r-1,\lambda}^{(j)} - \Gamma_{\nu+r-1,\lambda}^{(j)}) + p_1 \cdot (C_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)} - \Gamma_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)}) + \ldots + p_{r-1} \cdot (C_{\nu,\lambda}^{(j)} - \Gamma_{\nu,\lambda}^{(j)})$$
$$+ (p_1^{(\nu+\lambda)} - p_1) \cdot C_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)} + \ldots + (p_{r-1}^{(\nu+\lambda)} - p_{r-1}) \cdot C_{\nu,\lambda}^{(j)} = 0.$$

Erklären wir die Größen $P_{\nu,\lambda}^{(j)}$ durch die Gleichungen

$$P_{\nu,\lambda}^{(j)} = C_{\nu,\lambda}^{(j)} - \Gamma_{\nu,\lambda}^{(j)}, \tag{1}$$

so schreibt sich die vorige Gleichung in der Form:

$$P_{\nu+r-1,\lambda}^{(j)} + p_1 \cdot P_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)} + \ldots + p_{r-1} \cdot P_{\nu,\lambda}^{(j)}$$
$$+ (p_1^{(\nu+\lambda)} - p_1) \cdot C_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)} + \ldots + (p_{r-1}^{(\nu+\lambda)} - p_{r-1}) \cdot C_{\nu,\lambda}^{(j)} = 0. \tag{2}$$

Wegen (1) ist

3) $$P^{(j)}_{\nu,\lambda} = 0 \qquad (\nu, j = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

Wir schätzen nun zunächst die Größen $P^{(j)}_{\nu,\lambda}$ ab; indem wir

$$P^{(j)\,0}_{\nu,\lambda} = P^{(j)}_{\nu,\lambda}$$

setzen, definieren wir hierzu gewisse Größen $P^{(j)\,k}_{\nu+1,\lambda}$ durch die Gleichungen:

4) $$\begin{cases} P^{(j)\,1}_{\nu+1,\lambda} = P^{(j)\,0}_{\nu+1,\lambda} - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot P^{(j)\,0}_{\nu,\lambda}, \\ P^{(j)\,2}_{\nu+1,\lambda} = P^{(j)\,1}_{\nu+1,\lambda} - \frac{\varrho_3}{\varrho_1} \cdot P^{(j)\,1}_{\nu,\lambda}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P^{(j)\,r-1}_{\nu+1,\lambda} = P^{(j)\,r-2}_{\nu+1,\lambda} - \frac{\varrho_r}{\varrho_1} \cdot P^{(j)\,r-2}_{\nu,\lambda}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

5) $$\begin{cases} P^{(j)\,1}_{\nu+1,\lambda} = P^{(j)\,0}_{\nu+1,\lambda} - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot P^{(j)\,0}_{\nu,\lambda}, \\ P^{(j)\,2}_{\nu+2,\lambda} = P^{(j)\,0}_{\nu+2,\lambda} - \frac{\varrho_2+\varrho_3}{\varrho_1} \cdot P^{(j)\,0}_{\nu+1,\lambda} + \frac{\varrho_2 \cdot \varrho_3}{\varrho_1^2} \cdot P^{(j)\,0}_{\nu,\lambda}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P^{(j)\,r-1}_{\nu+r-1,\lambda} = P^{(j)\,0}_{\nu+r-1,\lambda} - \frac{\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_r}{\varrho_1} P^{(j)\,0}_{\nu+r-2,\lambda} \\ \qquad + - \ldots + (-1)^{r-1} \frac{\varrho_2 \cdot \varrho_3 \cdots \varrho_r}{\varrho_1^{r-1}} P^{(j)\,0}_{\nu,\lambda}. \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung folgt im Hinblick auf (2), daß

6) $$-P^{(j)\,r-1}_{\nu+r-1,\lambda} = (p_1^{(\nu+\lambda)} - p_1) \cdot C^{(j)}_{\nu+r-2,\lambda} + (p_2^{(\nu+\lambda)} - p_2) \cdot C^{(j)}_{\nu+r-3,\lambda} + \ldots + (p_{r-1}^{(\nu+\lambda)} - p_{r-1}) \cdot C^{(j)}_{\nu,\lambda}.$$

Ferner folgt aus (4), daß

7) $$P^{(j)\,k}_{\nu+1,\lambda} = \frac{\varrho_{k+2}}{\varrho_1} \cdot P^{(j)\,k}_{\nu,\lambda} + \frac{\varrho_{k+3}}{\varrho_1} \cdot P^{(j)\,k+1}_{\nu,\lambda} + \ldots + \frac{\varrho_r}{\varrho_1} \cdot P^{(j)\,r-2}_{\nu,\lambda} + P^{(j)\,r-1}_{\nu+1,\lambda}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

Nun definieren wir gewisse Größen K_j durch die Gleichungen:

8) $$K_j = \frac{G_j}{G_{r-2}} K_{r-2} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r-2),$$

worin K_{r-2} durch die Gleichung

9) $$K_{r-2} = \frac{1-q}{\sigma \cdot q \cdot \prod_{\lambda=2}^{r} \left|1 - \frac{\varrho_\lambda}{\varrho_1}\right|}$$

erklärt wird, und G_j wieder die in (5) § 10 angegebene Bedeutung hat; aus (8) folgt:

$$K_j = \frac{K_j + G_j}{K_{r-2} + G_{r-2}} \cdot K_{r-2}. \tag{10}$$

Wegen (3) und (5) gilt:

$$P^{(j)\,k}_{r-2,\lambda} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-2)$$

und deshalb:

$$|P^{(j)\,k}_{r-2,\lambda}| < K_j \lambda_k q^0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-2) \tag{11}$$

Weiter ist nach (8) § 7 und (5) § 10:

$$|C^{(j)}_{\mu,\lambda}| < G_j + K_j \leqq (G_j + K_j) \cdot q^{\mu-(r-2)} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, r-2) \tag{12}$$

Nehmen wir jetzt an, es seien für irgendeine Zahl ν die Ungleichungen

$$\begin{cases} |P^{(j)\,k}_{\nu+r-2,\lambda}| < K_j \cdot \lambda_k \cdot q^{\nu} & (\lambda \geqq 0;\ k = 0, 1, 2, \ldots, r-2), \\ |C^{(j)}_{\nu+\mu,\lambda}| < (G_j + K_j) q^{\nu+\mu-(r-2)} & (\lambda \geqq 0;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, r-2), \end{cases} \tag{13}$$

erfüllt. Dann folgt aus (6):

$$\begin{aligned} |P^{(j)\,r-1}_{\nu+r-1,\lambda}| &\leqq |p_1^{(\nu+\lambda)} - p_1| \cdot |C^{(j)}_{\nu+r-2,\lambda}| + |p_2^{(\nu+\lambda)} - p_2| \cdot |C^{(j)}_{\nu+r-3,\lambda}| \\ &\quad + \ldots + |p_{r-1}^{(\nu+\lambda)} - p_{r-1}| \cdot |C^{(j)}_{\nu,\lambda}| \\ &\leqq (G_j + K_j) \cdot \left(\frac{|p_1^{(\nu+\lambda)} - p_1|}{q} + \frac{|p_2^{(\nu+\lambda)} + p_2|}{q^2} + \ldots + \frac{|p_{r-1}^{(\nu+\lambda} - p_{r-1}|}{q^{r-1}} \right) \cdot q^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir wegen (2) § 9:

$$|P^{(j)\,r-1}_{\nu+r-1,\lambda}| < (G_j + K_j) \frac{1-q}{\sigma \cdot q \cdot \prod_{\lambda=2}^{r} \left|1 - \frac{\varrho_\lambda}{\varrho_1}\right|} \cdot \frac{\lambda_{r-1}}{\dfrac{1-q}{\sigma \cdot q \cdot \prod_{\lambda=2}^{r} \left|1 - \frac{\varrho_\lambda}{\varrho_1}\right|} + \frac{1}{\lambda_{r-2}}} \cdot q^{\nu+1},$$

also mit Rücksicht auf (6) § 10, (9) und (10):

$$|P^{(j)\,r-1}_{\nu+r-1,\lambda}| < K_j \cdot \lambda_{r-1} \cdot q^{\nu+1}.$$

Aus (7) folgt, daß also

$$\begin{aligned} |P^{(j)\,k}_{\nu+r-1,\lambda}| &\leqq \frac{|\varrho_{k+2}|}{|\varrho_1|} \cdot |P^{(j)\,k}_{\nu+r-2,\lambda}| + \frac{|\varrho_{k+3}|}{|\varrho_1|} \cdot |P^{(j)\,k+1}_{\nu+r-2,\lambda}| \\ &\quad + \ldots + \frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|} \cdot |P^{(j)\,r-2}_{\nu+r-2,\lambda}| + |P^{(j)\,r-1}_{\nu+r-1,\lambda}| \\ &< K_j \cdot \left(\frac{|\varrho_{k+2}|}{|\varrho_1|\,q} \cdot \lambda_k + \frac{|\varrho_{k+3}|}{|\varrho_1|\,q} \cdot \lambda_{k+1} + \ldots + \frac{|\varrho_r|}{|\varrho_1|\,q} \cdot \lambda_{r-2} + \lambda_{r-1} \right) \cdot q^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Im Hinblick auf (6) und (6′) § 3 erhalten wir schließlich hieraus:

$$|P^{(j)\,k}_{\nu+r-1,\lambda}| < K_j \cdot \lambda_k \cdot q^{\nu+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-2); \tag{14}$$

o speziell für $k = 0$:

$$|P^{(j)\,0}_{\nu+r-1,\lambda}| = |C^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda} - \Gamma^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda}| < K_j \cdot q^{\nu+1}$$

d folglich:

$$|C^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda}| < |\Gamma^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda}| + K_j \cdot q^{\nu+1}.$$

ıter Beachtung von (9) § 10 folgt dann, daß

5) $$|C^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda}| < (G_j + K_j) \cdot q^{\nu+1}.$$

Die Ungleichungen (14) und (15) zeigen, daß unsere Annahmen (13) ch noch für $\nu+1$ richtig wären; nun sind diese aber wegen (11) und 2) für $\nu = 0$ in der Tat erfüllt und daher sind sie allgemein richtig, daß insbesondere gilt:

6) $$|P^{(j)}_{\nu+r-2,\lambda}| < K_j \cdot q^{\nu} \qquad (\lambda, \nu \geqq 0),$$

7) $$|C^{(j)}_{\nu,\lambda}| < (G_j + K_j) \cdot q^{\nu-(r-2)} \qquad (\lambda, \nu \geqq 0).$$

Hieraus erkennen wir ohne weiteres die Konvergenz der Reihen:

8) $$D^{(j)}_{\nu,\lambda} = -\sum_{\mu=0}^{\infty} C^{(j)}_{\nu+\mu,\lambda} \qquad (\lambda, \nu \geqq 0).$$

s Funktionen von ν aufgefaßt, genügen diese der Relation (5) § 7 und d deshalb Integrale der Gleichung (1) § 7. Dabei bemerken wir für iter, daß bei einer reinperiodischen Kette die Größen $C^{(j)}_{\nu,\lambda}$ mit $\Gamma^{(j)}_{\nu,\lambda}$ und mit auch die Integrale $D^{(j)}_{\nu,\lambda}$ mit $\Delta^{(j)}_{\nu,\lambda}$ [vgl. (14) § 8] identisch sind. Aus 7) folgt:

9) $$|D^{(j)}_{\nu,\lambda}| \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} |C^{(j)}_{\nu+\mu,\lambda}| < \frac{G_j + K_j}{(1-q)\cdot q^{r-2}} \cdot q^{\nu} \qquad (\nu, \lambda \geqq 0).$$

so

9′) $$\lim_{\nu=\infty} D^{(j)}_{\nu,\lambda} = 0 \qquad (\lambda \geqq 0;\ j = 0, 1, 2, \ldots, r-2).$$

Wegen (14) § 8 haben wir außerdem mit Rücksicht auf (3):

$$|D^{(r-2)}_{0,\lambda} - \Delta^{(r-2)}_{0,\lambda}| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |C^{(r-2)}_{\nu,\lambda} - \Gamma^{(r-2)}_{\nu,\lambda}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |P^{(r-2)}_{\nu,\lambda}| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |P^{(r-2)}_{\nu+r-2,\lambda}|$$
$$(\lambda \geqq 0)$$

d daher wegen (16):

$$|D^{(r-2)}_{0,\lambda} - \Delta^{(r-2)}_{0,\lambda}| < K_{r-2} \cdot \frac{q}{1-q} \qquad (\lambda \geqq 0).$$

s (11), (15) und (16′) § 8 und aus (9) erhalten wir schließlich:

$$|D^{(r-2)}_{0,\lambda} - \Delta^{(r-2)}_{0,\lambda}| < \frac{1}{\sigma} \cdot |\Delta^{(r-2)}_{0}| = \frac{1}{\sigma} \cdot |\Delta^{(r-2)}_{0,\lambda}| \qquad (\lambda \geqq 0).$$

nun $\sigma \geqq 1$ ist, folgt aus dieser Ungleichung, daß

0) $$D^{(r-2)}_{0,\lambda} \neq 0 \qquad (\lambda \geqq 0).$$

Ferner ist

$$(21) \qquad |D_{0,\lambda}^{(r-2)}| > \frac{\sigma-1}{\sigma}\cdot|\Delta_0^{(r-2)}| = \frac{\sigma-1}{\sigma\cdot\prod_{\lambda=2}^{r}\left|1-\frac{\varrho_\lambda}{\varrho_1}\right|} \qquad (\lambda \geqq 0)$$

§ 12.

Die Konvergenz der gegebenen Kette.

Wir nehmen jetzt die Entwicklungen des § 7 wieder auf; da wir jetzt wissen, daß die Reihen (18) § 11 konvergieren, dürfen wir die Gleichungen (9) und (10) § 7 umformen wie folgt:

$$B_{\nu,\lambda}^{(j)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu,\lambda}^{(j-1)} - \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\nu+\mu,\lambda}^{(j-1)} - \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu,\lambda}^{(j)} + \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\nu+\mu,\lambda}^{(j)} \quad (j=1,2,\ldots,r-2)$$

$$B_{\nu,\lambda}^{(r-1)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu,\lambda}^{(r-2)} - \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\nu+\mu,\lambda}^{(r-2)}.$$

Mit Rücksicht auf (18) § 11 erhalten wir dann hieraus:

$$(1) \qquad B_{\nu,\lambda}^{(j)} = D_{\nu,\lambda}^{(j-1)} - D_{\nu,\lambda}^{(j)} + D_{0,\lambda}^{(j)} - D_{0,\lambda}^{(j-1)} \qquad (j=1,2,\ldots,r-2)$$

$$(1') \qquad B_{\nu,\lambda}^{(r-1)} = D_{\nu,\lambda}^{(r-2)} - D_{0,\lambda}^{(r-2)}.$$

Wir haben hiermit die Integrale $B_{\nu,\lambda}^{(j)}$ linear und homogen durch $r-$ andere Integrale ausgedrückt, wie man unter Beachtung der Gleichung (7 § 7 erkennt.

Hieraus folgt wegen (19′) § 11, daß

$$\lim_{\nu=\infty} B_{\nu,\lambda}^{(j)} = D_{0,\lambda}^{(j)} - D_{0,\lambda}^{(j-1)} \qquad (j=1,2,\ldots,r-2)$$

$$\lim_{\nu=\infty} B_{\nu,\lambda}^{(r-1)} = \quad - D_{0,\lambda}^{(r-2)},$$

und nach (20) § 11 ist

$$\lim_{\nu=\infty} B_{\nu-1,\lambda+1}^{(r-1)} = - D_{0,\lambda+1}^{(r-2)} \neq 0 \qquad (\lambda \geqq 0)$$

so daß wir also aus (6) § 6 die Gleichungen erhalten:

$$(2) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu,\lambda}^{(j)}}{A_{\nu-1,\lambda+1}^{(r-1)}} = \varrho_1^{(\lambda+j)}\cdot\varrho_1^{(\lambda+j+1)}\cdot\ldots\cdot\varrho_1^{(\lambda+r-1)}\cdot\frac{D_{0,\lambda}^{(j-1)} - D_{0,\lambda}^{(j)}}{D_{0,\lambda+1}^{(r-2)}} \qquad (\lambda \geqq 0)$$

$$(j=1,2,\ldots,r-2)$$

$$(2') \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu,\lambda}^{(r-1)}}{A_{\nu-1,\lambda+1}^{(r-1)}} = \varrho_1^{(\lambda+r-1)}\cdot\frac{D_{0,\lambda}^{(r-2)}}{D_{0,\lambda+1}^{(r-2)}} \qquad (\lambda \geqq 0)$$

Die Kette (12) § 3 ist also tatsächlich konvergent, und zwar ist die Konvergenz eine unbedingte; damit ist die am Schluß des § 3 aufgestellte

ehauptung als richtig erwiesen; wir formulieren unser Ergebnis unter eachtung von Satz 1 in dem fundamentalen

Satz 2. *Dann und nur dann, wenn die Wurzeln* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ *der leichung*

$$x^r + a_1 \cdot x^{r-1} + a_2 \cdot x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} \cdot x + a_r = 0$$

e Bedingung erfüllen:

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| \geqq |\varrho_3| \geqq \cdots \geqq |\varrho_r|,$$

bt. es gewisse positive Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *derart, daß, wenn die ngleichungen*

$$|a_i^{(\nu)} - a_i| \leqq \alpha_i \qquad (\nu \geqq 0;\ i = 1, 2, \ldots, r)$$

lten, dann die Jacobi-Kette

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu)} \cdot A_\nu^{(j)} = 0$$

nvergent ist; die Konvergenz ist eine unbedingte.

Für die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *sind z. B. die in den Gleichungen* 9) § 3 *angegebenen Werte zulässig.*

Dieser Satz ist auch für den Fall bewiesen, daß beliebig viele Wurzeln, doch nicht alle verschwinden.

Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ in den Gleichungen (9) § 3 sind abhängig on einer beliebigen, aber in bestimmter Weise gewählten Zahl $\sigma \geqq 1$; e nehmen für $\sigma = 1$ ihre größten Werte an.

§ 13.

Anwendung auf Kettenbrüche.

Die Anwendung des Fundamentalsatzes auf Ketten erster Ordnung rgibt nach einer in § 1 gemachten Bemerkung, wenn wir noch vorüber-ehend

$$a_\nu = -a_2^{(\nu)}, \qquad a = -a_2,$$
$$b_\nu = -a_1^{(\nu)}, \qquad b = -a_1,$$

etzen, den

Satz 3. *Dann und nur dann, wenn die Wurzeln* ϱ_1 *und* ϱ_2 *der leichung*

$$x^2 - bx - a = 0$$

ie Bedingung erfüllen:

$$|\varrho_1| > |\varrho_2|,$$

ibt es gewisse positive Zahlen α *und* β *derart, daß aus*

$$|a_\nu - a| \leqq \alpha, \qquad |b_\nu - b| \leqq \beta \qquad (\nu \geqq 0)$$

die Konvergenz des Kettenbruches

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots$$

folgt.

Für die Zahlen α und β sind die folgenden Werte zulässig:

$$\alpha = \frac{(1-q)\cdot q\cdot\left(q-\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|\right)^2}{\left[1-q+q\left|1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|\right]\cdot\left[2m+1-\frac{|\varrho_2|}{|\varrho_1|\cdot q}\right]}\cdot|\varrho_1|^2,$$

$$\beta = \frac{(1-q)\cdot\left(q-\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|\right)^2}{\left[1-q+q\left|1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|\right]\cdot\left[2m+1-\frac{|\varrho_2|}{|\varrho_1|\cdot q}\right]}\cdot|\varrho_1|;$$

darin ist q irgendeine Zahl zwischen $\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|$ und 1; ferner

$$m = \mathrm{Max}\left(1, \left|1+\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|\right).$$

Um die Wirksamkeit dieses Kriteriums mit der des Perronschen Kriteriums[14]) zu vergleichen, betrachten wir den Kettenbruch:

$$101 - \frac{100|}{|101} - \ldots - \frac{100+200\,\frac{\nu-1}{\nu}|}{|101} - \ldots .$$

Hierin ist $a = -100$, $b = 101$, also $a_\nu - a = -200\cdot\frac{\nu-1}{\nu}$, $\varrho_1 = 100$, $\varrho_2 = 1$.

Setzen wir $q = \frac{1}{2}$, so ist $\alpha = 201,0\ldots$, so daß nach unserem Kriterium der Kettenbruch konvergent ist; jenes versagt hier, da es nur für solche Werte von a_ν wirksam ist, für welche

$$|a_\nu - a| < 100.$$

Nehmen wir hingegen den Kettenbruch:

$$101 - \frac{100|}{|101} - \ldots - \frac{100}{|101+24\,\frac{\nu-1}{\nu}|} - \ldots$$

so ist hierin wieder $a = -100$, $b = 101$, also $b_\nu - b = 24\cdot\frac{\nu-1}{\nu}$, $\varrho_1 = 100$, $\varrho_2 = 1$.

Nach dem Perronschen Kriterium ergibt sich hieraus für die erlaubten Werte: $\vartheta = \frac{1}{100}$, $\theta = \frac{101}{200}$ als Konvergenzbereich:

$$|b_\nu - b| \leqq 24,5\ldots,$$

[14]) Perron V., S. 281.

o daß also hiernach die Konvergenz feststeht, während unser Kriterium eine Entscheidung liefert; denn es ist

$$\beta < \frac{(1-q)\cdot q^2}{2\cdot\left(1-q\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|\right)}\cdot|\varrho_1| < \frac{(1-q)\cdot q^2}{2\cdot\left(1-\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|\right)}\cdot|\varrho_1| \quad (0<q<1),$$

o daß in unserem Falle

$$\beta < \frac{100\cdot(1-q)\cdot q^2}{2\cdot\frac{99}{100}} < \frac{100}{9} \qquad (0<q<1).$$

Keines von den beiden Kriterien macht also das andere überflüssig; agegen ist das von Herrn Szász[15]) angegebene Kriterium günstiger als as unsere, was auch von vornherein bei den allgemeinen Voraus-etzungen, unter denen unsere Konvergenzbereiche gewonnen sind, nicht nders zu erwarten war.

§ 14.

Die gleichmäßige Konvergenz der gegebenen Kette.

Wir wollen weitere Eigenschaften der gegebenen Kette ermitteln; ierzu beachten wir, daß aus (6) § 6 und (1) (1′) (2) (2′) § 12 folgt:

$$\frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} - \lim_{\nu=\infty}\frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}}$$

$$= \varrho_1^{(j)}\cdot\varrho_1^{(j+1)}\cdots\varrho_1^{(r-1)}\cdot\left[\frac{D_{\nu,0}^{(j-1)} - \delta_j\cdot D_{\nu,0}^{(j)} + \delta_j\cdot D_{0,0}^{(j)} - D_{0,0}^{(j-1)}}{D_{\nu-1,1}^{(r-2)} - D_{0,1}^{(r-2)}} + \frac{\delta_j\cdot D_{0,0}^{(j)} - D_{0,0}^{(j-1)}}{D_{0,1}^{(r-2)}}\right];$$

arin ist

$$\delta_j = 1 \ (j = 1, 2, \ldots, r-2); \qquad \delta_{r-1} = 0.$$

lso gilt:

1)
$$\left|\frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} - \lim_{\nu=\infty}\frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}}\right| \leqq \left|\varrho_1^{(j)}\cdot\varrho_1^{(j+1)}\cdots\varrho_1^{(r-1)}\right| \cdot \frac{\left|D_{\nu,0}^{(j-1)}\right|\cdot\left|D_{0,1}^{(r-2)}\right| + \delta_j\left|D_{\nu,0}^{(j)}\right|\cdot\left|D_{0,1}^{(r-2)}\right| + \left|D_{\nu-1,1}^{(r-2)}\right|\cdot\left[\delta_j\left|D_{0,0}^{(j)}\right| + \left|D_{0,0}^{(j-1)}\right|\right]}{\left|D_{0,1}^{(r-2)}\right|\cdot\left|\left|D_{0,1}^{(r-2)}\right| - \left|D_{\nu-1,1}^{(r-2)}\right|\right|}.$$

Aus (19) § 11 ersieht man, daß

2)
$$\left|D_{\nu,\lambda}^{(j)}\right| < \varkappa\cdot q^\nu,$$

vobei $\varkappa$ eine Konstante ist, somit ist

3)
$$\left|D_{0,\lambda}^{(j)}\right| < \varkappa.$$

---

[15]) Szász, S. 398 (3) und S. 399 (4).

Die Größen α_i in (9) § 3 sind Funktionen von σ; wir bezeichnen s deshalb hier mit $\alpha_i(\sigma)$; machen wir nun die Voraussetzung, daß

$$|a_i^{(\nu)} - a_i| \leqq \varphi_i \qquad (\nu \geqq 0$$

worin

$$\varphi_i = \theta \cdot \alpha_i(1) \qquad (0 < \theta < 1$$

so erkennt man leicht aus (8) und (9) § 3, daß es eine Zahl σ_1 dera gibt, daß

$$\varphi_i = \alpha_i(\sigma_1) \qquad (\sigma_1 > 1$$

Dann folgt aus (21) § 11, daß

$$|D_{0,1}^{(r-2)}| > \frac{\sigma_1 - 1}{\sigma_1} \cdot |\Delta_0^{(r-2)}| = \tau \neq 0.$$

Wegen (2) existiert nun zunächst eine Zahl ν_0 derart, daß d Nenner in dem Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung (1 nämlich

$$|D_{0,1}^{(r-2)}| \, \big| |D_{0,1}^{(r-2)}| - |D_{\nu-1,1}^{(r-2)}| \big| > \frac{\tau^2}{2} \qquad (\nu \geqq \nu_0$$

ist, so daß aus (10′) § 4, (2) und (3) folgt:

$$\left| \frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} - \lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} \right| < |\varrho_1|^{r-j} \cdot (2-q)^{r-j} \frac{\varkappa^2 \cdot q + \delta_j \varkappa^2 q + \varkappa(\delta_j \varkappa + \varkappa)}{\frac{\tau^2}{2}} q^{\nu-1}$$

$$(\nu \geqq \nu_0$$

Wir können also eine von den Elementen $a_i^{(\nu)}$ unabhängige Zahl derart wählen, daß

$$\left| \frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} - \lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} \right| < \mathsf{M} \cdot q^\nu \qquad (\nu \geqq \nu_0; \quad j = 1, 2, \ldots, r-1$$

Die Folgerung aus dieser Ungleichung sprechen wir aus in

Satz 4: *Wenn die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ der Gleichung*

$$x^r + a_1 \cdot x^{r-1} + a_2 \cdot x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} x + a_r = 0$$

die Bedingung erfüllen:

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| \geqq |\varrho_3| \geqq \ldots \geqq |\varrho_r|,$$

gibt es für die Jacobi-Kette

$$A_{\nu+r}^{j} + a_1^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu)} \cdot A_\nu^{(j)} = 0$$
$$|a_i^{(\nu)} - a_i| \leqq \theta \cdot a_i \qquad (0 < \theta < 1; \quad \nu \geqq 0; \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

zu jeder beliebigen, positiven Größe ε eine von den Elementen $a_i^{(\nu)}$ un abhängige Zahl ν_1 derart, daß für $\nu \geqq \nu_1$

$$\left| \frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} - \lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(j)}}{A_{\nu-1,1}^{(r-1)}} \right| < \varepsilon.$$

Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *sind durch die Gleichungen* (9) § 3 *mit* $= 1$ *gegeben.*

Wegen dieser Gleichmäßigkeit heißt diese Art der Konvergenz auch *leichmäßige* Konvergenz.

§ 15.

Die Konvergenz der limitärperiodischen Ketten.

Wir wollen jetzt die Ergebnisse der §§ 12 und 14 auf limitär-eriodische Ketten anwenden.

Bei jeder derartigen Kette

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu)} \cdot A_r^{(j)} = 0,$$

obei

$$\lim_{\nu=\infty} a_i^{(\nu)} = a_i,$$

ibt es eine Zahl λ derart, daß

$$|a_i^{(\nu)} - a_i| \leqq \alpha_i \qquad (\nu \geqq \lambda).$$

Wenn wir also unsere Voraussetzungen über die Wurzeln der charakte-istischen Gleichung beibehalten, so ist die Kette

$$A_{\nu+r,\lambda}^{(j)} + a_1^{(\nu+\lambda)} \cdot A_{\nu+r-1,\lambda}^{(j)} + a_2^{(\nu+\lambda)} \cdot A_{\nu+r-2,\lambda}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu+\lambda)} \cdot A_{\nu,\lambda}^{(j)} = 0 \quad (\nu \geqq 0)$$

onvergent; fügen wir noch die weitere Voraussetzung hinzu:

$$a_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu \geqq 0),$$

dürfen wir den Hilfssatz 1 § 1 anwenden und erhalten sofort den

Satz 5. *Wenn die Wurzeln* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ *der Gleichung*

$$x^r + a_1 \cdot x^{r-1} + a_2 \cdot x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} x + a_r = 0$$

ie Bedingung erfüllen:

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| \geqq |\varrho_3| \geqq \ldots \geqq |\varrho_r|,$$

t die limitärperiodische Jacobi-Kette

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu)} \cdot A_\nu^{(j)} = 0,$$

obei

$$\lim_{\nu=\infty} a_i^{(\nu)} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$a_r^{(\nu)} \neq 0 \qquad (\nu \geqq 0)$$

st, mindestens im weiteren Sinne konvergent.

§ 16.

Die Existenz der Grenzwerte: $\lim_{\lambda=\infty}\lim_{\nu=\infty}\frac{A^{(j)}_{\nu,\lambda}}{A^{(r-1)}_{\nu-1,\lambda+1}}$ bei limitärperiodischen Ketten.

Wir betrachten jetzt eine limitärperiodische Kette, die den Voraussetzungen des Fundamentalsatzes genügt:

$$A^{(j)}_{\nu+r,\lambda}+(a_1+\alpha_1^{(\nu+\lambda)})A^{(j)}_{\nu+r-1,\lambda}+(a_2+\alpha_2^{(\nu+\lambda)})A^{(j)}_{\nu+r-2,\lambda}+\dots$$

$$+(a_r+\alpha_r^{(\nu+\lambda)})A^{(j)}_{\nu,\lambda}=0 \tag{1}$$

$$\lim_{\nu=\infty}\alpha_i^{(\nu)}=0 \qquad (\nu,\lambda\geqq 0$$

Zweckmäßigerweise wollen wir annehmen, daß

$$|\alpha_i^{(\nu)}|\leqq\alpha_i \qquad (\nu\geqq 0 \tag{2}$$

Hierin sind die Zahlen α_i durch (9) § 3 gegeben; wir wissen, daß diese Kette konvergent ist. Um nun die Abhängigkeit ihres Wertesystems $\omega_j^{(\lambda)}$ vom Index λ zu untersuchen, bemerken wir, daß sie sich der Kette (1) § 3 unterordnet, so daß wir die hierauf bezüglichen Formeln und Sätze anwenden dürfen; so ergibt sich als Ausdruck für ihr Wertsystem nach (2) und (2′) § 12:

$$\omega_j^{(\lambda)}=\varrho^{(\lambda+j)}\cdot\varrho_1^{(\lambda+j+1)}\dots\varrho_1^{(\lambda+r-1)}\cdot\frac{D^{(j-1)}_{0,\lambda}-D^{(j)}_{0,\lambda}}{D^{(r-2)}_{0,\lambda+1}} \qquad (\lambda\geqq 0 \tag{3}$$

$$(j=1,2,\dots,r-2),$$

$$\omega_{r-1}^{(\lambda)}=\varrho_1^{(\lambda+r-1)}\cdot\frac{D^{(r-2)}_{0,\lambda}}{D^{(r-2)}_{0,\lambda+1}} \qquad (\lambda\geqq 0) \tag{3′}$$

Zunächst folgt wegen (1) und (2) aus dem Hilfssatz § 5, daß

$$\lim_{\lambda=\infty}\varrho_1^{(\lambda)}=\varrho_1. \tag{4}$$

Wir wollen nun zeigen, daß auch

$$\lim_{\lambda=\infty}D^{(j)}_{0,\lambda}=\Delta^{(j)}_0 \qquad (j=0,1,2,\dots,r-2) \tag{5}$$

Hierzu beachten wir, daß aus (14) § 8 und (18) § 11 folgt:

$$D^{(j)}_{0,\lambda}-\Delta^{(j)}_{0,\lambda}=-\sum_{\mu=0}^{\infty}(C^{(j)}_{\mu,\lambda}-\Gamma^{(j)}_{\mu,\lambda})$$

und somit wegen (1) § 11:

$$|D^{(j)}_{0,\lambda}-\Delta^{(j)}_{0,\lambda}|\leqq\Big|\sum_{\mu=0}^{\nu_0+r-1}(C^{(j)}_{\mu,\lambda}-\Gamma^{(j)}_{\mu,\lambda})\Big|+\Big|\sum_{\mu=\nu_0+r}^{\infty}P^{(j)}_{\mu,\lambda}\Big| \tag{6}$$

$$\leqq\sum_{\mu=0}^{\nu_0+r-1}|(C^{(j)}_{\mu,\lambda}-\Gamma^{(j)}_{\mu,\lambda})|+\sum_{\mu=\nu_0+r}^{\infty}|P^{(j)}_{\mu,\lambda}|.$$

un ist nach (16) § 11:

$$\sum_{\mu=\nu_0+r}^{\infty} |P_{\mu,\lambda}^{(j)}| < \frac{K_j}{1-q} \cdot q^{\nu_0+2}.$$

Gibt man jetzt eine beliebig kleine, positive Größe ε vor, so existiert so eine von λ unabhängige Zahl ν_0 derart, daß

$$\sum_{\mu=\nu_0+r}^{\infty} |P_{\mu,\lambda}^{(j)}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{)}$$

un sind die Größen

$$C_{\mu,\lambda}^{(j)} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_0 + r - 1)$$

nze rationale, also stetige Funktionen der Größen:

$$p_i^{(\lambda)}, p_i^{(\lambda+1)}, \ldots, p_i^{(\lambda+\nu_0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

rsetzt man diese durch die entsprechenden Größen:

$$p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

erhält man, wie sich aus der Gegenüberstellung der Gleichungen (9) 8 und (6) § 7 sofort ergibt, die Ausdrücke für

$$\Gamma_{\mu,\lambda}^{(j)} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_0 + r - 1).$$

us dem Hilfssatz § 5 ergibt sich noch wegen (2) § 7 und (5) § 8, daß

$$\lim_{\lambda=\infty} p_i^{(\lambda)} = p_i.$$

lso gibt es eine Zahl λ_0 derart, daß

$$|C_{\mu,\lambda}^{(j)} - \Gamma_{\mu,\lambda}^{(j)}| \leqq \frac{\varepsilon}{2(\nu_0+r)} \qquad (\lambda \geqq \lambda_0;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu_0 + r - 1).$$

it Rücksicht auf (7) fließt hieraus und aus (6), daß

$$|D_{0,\lambda}^{(j)} - \Delta_{0,\lambda}^{(j)}| < \varepsilon \qquad (\lambda \geqq \lambda_0).$$

iermit ist wegen (15) § 8 die Gleichung (5) als richtig erwiesen.

Wegen (4) und (5) ergibt sich dann aus (3) und (3′), daß

$$\lim_{\lambda=\infty} \omega_j^{(\lambda)} = \varrho_1^{r-j} \cdot \frac{\Delta_0^{(j-1)} - \Delta_0^{(j)}}{\Delta_0^{(r-2)}} \quad (j = 1, 2, \ldots, r-2),$$

$$\lim_{\lambda=\infty} \omega_{r-1}^{(\lambda)} = \varrho_1.$$

un sind doch diese Grenzwerte nichts anderes als das Wertesystem der geordneten reinperiodischen Kette, das wir leicht berechnen können; s (16) und (16′) § 8 folgt nämlich:

$$\lim_{\lambda=\infty} \omega_j^{(\lambda)} = p_{r-j-1} \cdot \varrho_1^{r-j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r-2),$$

woraus sich nach (6) § 8 ergibt, daß

$$\lim_{\lambda=\infty} \omega_j^{(\lambda)} = \varrho_1^{r-j} \cdot (1 + q_1 + q_2 + \ldots + q_{r-j-1}).$$

Im Hinblick auf (3) § 8 erhalten wir schließlich hieraus:

$$\lim_{\lambda=\infty} \omega_j^{(\lambda)} = \varrho_1^{r-j} + a_1 \cdot \varrho_1^{r-j-1} + a_2 \cdot \varrho_1^{r-j-2} + \ldots + a_{r-j-1} \cdot \varrho_1$$
$$(j = 1, 2, \ldots, r-2).$$

Dies alles gilt unter der Bedingung (2); beachten wir aber, daß bei jeder limitärperiodischen Kette eine Zahl ν_1 derart existiert, daß

$$|\alpha_i^{(\nu)}| \leqq \alpha_i \qquad (\nu \geqq \nu_1$$

so können wir unser Ergebnis allgemein folgendermaßen aussprechen:

Satz 6. *Wenn die Wurzeln* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ *der Gleichung*

$$x^r + a_1 \cdot x^{r-1} + a_2 \cdot x^{r-2} + \ldots + a_{r-1} x + a_r = 0$$

die Bedingung erfüllen:

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| \geqq |\varrho_3| \geqq \ldots \geqq |\varrho_r|,$$

so gelten für die limitärperiodische Jacobi-Kette

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2^{(\nu)} \cdot A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r^{(\nu)} \cdot A_\nu^{(j)} = 0$$
$$\lim_{\nu=\infty} a_i^{(\nu)} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r$$

die Beziehungen:

$$\lim_{\lambda=\infty} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu,\lambda}^{(j)}}{A_{\nu-1,\lambda+1}^{(r-1)}} = \varrho_1^{r-j} + a_1 \cdot \varrho_1^{r-j-1} + a_2 \cdot \varrho_1^{r-j-2} + \ldots + a_{r-j-1} \cdot \varrho_1$$
$$(j = 1, 2, \ldots, r-1;\ a_0 = 1).$$

Das System dieser Grenzwerte ist gleich dem Wertesystem der zugeordneten reinperiodischen Jacobi-Kette:

$$A_{\nu+r}^{(j)} + a_1 \cdot A_{\nu+r-1}^{(j)} + a_2 \cdot A_{\nu+r-2}^{(j)} + \ldots + a_r \cdot A_\nu^{(j)} = 0.$$

Das ist die Verallgemeinerung eines Satzes, den für $r = 2$, also für Kettenbrüche, bereits Herr Perron auf andere Weise bewiesen hat[16]).

---

[16]) Perron V, S. 285, Satz 41.

(Eingegangen am 15. Januar 1922.)

Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires.

Par

J. Tamarkine [1]) à Pétrograd.

Il est bien connu que l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ssède toujours une seule courbe intégrale passant par le point donné $_0, y_0)$, si la fonction $f(x, y)$ est continue par rapport aux deux variles x, y et satisfait à la condition de Lipschitz:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq K |y_2 - y_1|,$$

étant une constante, dans un domaine R suffisamment petit, qui renme le point (x_0, y_0).

On sait aussi que *l'existence* de la courbe intégrale mentionnée est surée sous la seule condition que $f(x, y)$ est *continue* dans R, mais, en néral, cette courbe n'est pas unique [2]).

Dans cette note nous allons discuter le théorème *d'unicité* et démontrer la proposition suivante:

Soit (x_0, y_0) *un point donné et* R *un rectangle* $(x_0 \pm a, y_0 \pm b)$ *tel e la fonction* $f(x, y)$ *est continue pour tous les points de* R, *et de plus, 'on a pour deux points quelconques de* R, (x, y_1) *et* (x, y_2), *à une ême abscisse*:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq \varphi(|y_2 - y_1|),$$

u) *étant une fonction continue positive croissante de la variable posie* u, *et* $\varphi(0) = 0$.

[1]) Cette note est un extrait d'un travail plus étendu qui va bientôt paraître s le Bulletin de l'Academie des Sciences de Russie.

[2]) Voir G. Peano, Math. Ann. **37** (1890), p. 482; G. Mie, Math. Ann. **43** (1893), 533.

La courbe intégrale de (1) *qui passe par* (x_0, y_0) *est unique et pa faitement déterminée sous la seule condition que l'intégrale*

$$\int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} \qquad (0 < u < u$$

(3)

tend vers ∞ *pour* $u \to 0$ [3]).

Quand l'intégrale (3) est convergente, on peut indiquer des exempl assez généraux, où le théorème d'unicité n'a plus lieu, ce qui sera mont à la fin de la note.

On peut faire, sans restreindre la généralité, $x_0 = y_0 = 0$. Supposo que les conditions du théorème étant remplies on a trouvé deux solutio distinctes de (1), $y_1(x)$ et $y_2(x)$, telles qu'on ait pour $x = 0$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0. \tag{4}$$

Nous allons montrer que la différence $y_2(x) - y_1(x)$ est identiqu ment nulle dans l'intervalle $(0, a)$.

Posons a cet effet

$$v(x) = |y_2(x) - y_1(x)|. \tag{5}$$

Les équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1); \qquad \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_2)$$

nous donnent en vertu de (5), (4) et (2)

$$v(x) = \left|\int_0^x [f(\xi, y_2) - f(\xi, y_1)]\, d\xi\right| \leqq \int_0^x \varphi(v)\, d\xi, \tag{6}$$

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = \lim_{x=0} \frac{v(x)}{x} = \lim_{x=0} \frac{\int_0^x \varphi(v)\, d\xi}{x} = 0 \text{ [4]}). \tag{7}$$

Introduisons maintenant une fonction auxiliaire $z(x, h)$, qui est d terminée par les conditions

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z); \qquad z(0, h) = h,$$

h étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, mais donné à l'avanc

On peut montrer sans peine, qu'on a dans R:

$$0 \leqq v(x) < z(x, h). \tag{8}$$

---

[3]) Nous dirons alors simplement que l'intégrale (3) est *divergente*; dans le c contraire, où la limite de l'intégrale (3) pour $u = 0$ est finie, nous dirons qu'elle *convergente*.

[4]) On a supposé ici $x \geqq 0$. Les considérations analogues s'appliquent an c où x est $\leqq 0$.

On a, en effet

$$z(x,h) = h + \int_0^x \varphi(z)\,d\xi,$$

d'où l'on tire, en comparant avec (6) et (7):

9) $$z - v \geqq h + \int_0^x [\varphi(z) - \varphi(v)]\,d\xi,$$

$$z - v\big|_{x=0} = h; \quad \frac{d(z-v)}{dx}\Big|_{x=0} = \varphi(h) > 0.$$

Ceci nous montre que la différence $z - v$ est positive est croissante pour les valeurs de x assez petites. Supposons que la différence susdite peut prendre des valeurs $\leqq 0$ dans l'intervalle $(0, a)$ et soit E l'ensemble des valeurs de x correspondantes. Il est clair, que l'ensemble E, s'il n'est pas composé d'un nombre fini de points, est nécessairement fermé. Quoi qu'il soit, nous pouvons affirmer qu'il existe une telle valeur de x, $= x_1 > 0$, que

10) $$z(x) - v(x) > 0 \quad (0 \leqq x < x_1); \qquad z(x_1) - v(x_1) = 0.$$

En posant $x = x_1$ dans l'inégalité (9) on trouve:

$$z(x_1) - v(x_1) \geqq h + \int_0^{x_1} [\varphi(z) - \varphi(v)]\,d\xi > h$$

[eu égard à (10)], ce qui est absurde. L'inégalité (8) est ainsi démontrée.

Observons maintenant que $z(x,h)$ est une fonction croissante de x pour h donné et une fonction croissante de h pour x donné, qui est définie par l'équation

$$\int_h^z \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} = x.$$

La quantité $z(x,h)$ tend donc, pour $h \to 0$, vers une limite déterminée $z_0(x)$ pour chaque valeur de x dans l'intervalle $(0, a)$, et l'on a en outre

$$z(x,h) > z_0(x) \qquad (h > 0).$$

Or $z_0(x)$ ne peut qu'être identiquement nulle, car on aurait dans le cas contraire pour $h < z_0(x)$:

$$\int_h^{z_0(x)} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} < x$$

ce qui est impossible pour h assez petit, l'intégrale dans le premier membl étant divergente pour $h = 0$. On a donc

$$0 \leqq v(x) \leqq \lim_{h=0} z(x,h) = z_0(x) = 0,$$

c. q. f. d.

Considérons maintenant le cas, où l'intégrale (3) est *convergen* On peut faire deux hypothèses seulement:

1^0. On peut trouver deux constantes positives a_1, b_1 suffisamme petites telles qu'on ait dans le rectangle $R_1(\pm a_1, \pm b_1)$

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leqq \varphi_1(|y_2 - y_1|),$$

l'intégrale

$$\int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi_1(u)} \tag{11}$$

étant divergente. Le théorème d'unicité aura alors lieu.

2^0. Quelle que soit la fonction $\varphi_1(u)$ à l'intégrale (11) divergent on peut trouver une infinité de valeurs de $x > 0$, y_1, y_2 aussi proches de que l'on veut, pour lesquelles l'inégalité

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| > \varphi_1(|y_2 - y_1|)$$

est vérifiée (mais l'inégalité (2) est toujours remplie).

Dans ce cas *nous faisons l'hypothèse restrictive. on peut trouv une fonction continue positive croissante* $\psi(u)$ *qui possède les propriét suivantes*:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \geqq \psi(|y_2 - y_1|), \qquad (\psi(0) = 0 \tag{12}$$

dans R_1; *l'intégrale*

$$\int_u^{u_0} \frac{du}{\psi(u)}$$

est convergente pour $u = 0$.

Supposons d'abord qu'on a pour $y = 0$:

$$f(x,0) \equiv 0 \qquad (-a_1 \leqq x \leqq a_1 \tag{A}$$

La fonction $f(x,y)$ étant continue, l'inégalité (12), si l'on y pos $y_2 = y$, $y_1 = 0$, nous montre qu'il existe un rectangle $R_2(\pm a_2, \pm b_2$ intérieur à R_1, tel qu'on ait pour tous les points de R_2, dont l'ordonn est distincte de zéro:

$$f(x,y) \gtrless 0.$$

Cela posé, désignons par h un nombre positif aussi petit que l'o veut, mais donné à l'avance. Il nous faudra considérer trois cas possible

$$(\alpha)\ f(0,h)>0;\quad (\beta)\ f(0,h)<0,\quad f(0,-h)<0;$$
$$(\gamma)\ f(0,h)<0,\quad f(0,-h)>0.$$

Commençons par (α). Soit $Y=Y(x,h)$ une fonction qui satisfait aux équations

$$\frac{dY}{dx}=f(x,Y);\qquad Y(0,h)=h \tag{13}$$

et désignons par $w(x)$ une fonction qui est fournie par l'inversion de l'intégrale

$$\int_0^w \frac{dw}{\psi(w)}=x; \tag{14}$$

$w(x)$ est une fonction *positive croissante* qui vérifie les équations

$$\frac{dw}{dx}=\psi(w);\qquad w(0)=0. \tag{15}$$

Montrons d'abord qu'on a dans l'intervalle $(0,a_2)$

$$Y(x,h)>w(x). \tag{16}$$

Les formules (13) et (15) nous donnent en effet:

$$Y(x,h)-w(x)=h+\int_0^x [f(\xi,Y)-\psi(w)]\,d\xi, \tag{17}$$

$$Y(0,h)-w(0)=h>0,\qquad \frac{d(Y-w)}{dx}\Big|_{x=0}=f(0,h)-\psi(0)>0. \tag{18}$$

Ceci nous montre que pour les valeurs de x assez petit on a

$$Y(x,h)-w(x)>0.$$

Si l'on admet, que cette inégalité n'a pas lieu pour toutes les valeurs de x dans $(0,a_2)$, les considérations tout à fait analogues à celles qui sont exposées plus haut nous affirment l'existence d'une valeur $x=x_1<a_2$ telle qu'on ait

$$Y(x,h)-w(x)>0\quad \text{pour}\quad 0\leqq x<x_1;$$
$$Y(x_1,h)-w(x_1)=0.$$

La continuiaté des fonctions $f(x,y)$ et $Y(x,h)$ et l'hypothese (α) nous donnent alors, eu égard à (12):

$$f(x,Y)\geqq\psi(Y)\quad \text{pour}\quad 0\leqq x<x_1,$$

d'où l'on tire

$$Y(x_1,h)-w(x_1)\geqq h+\int_0^{x_1}[\psi(Y)-\psi(w)]\,d\xi>h$$

ce qui est absurde. L'inégalité (16) est ainsi démontrée.

Soit maintenant $0 < h_1 < h$. La fonction $Y(x, h_1)$ peut être déterminée de la manière qu'on ait

$$Y(x, h) \geqq Y(x, h_1) \quad \text{dans} \quad (0, a_2).$$

Cela est évident si les courbes

$$y = Y(x, h); \qquad y = Y(x, h_1)$$

ne se rencontrent pas dans $(0, a_2)$. Si le contraire a lieu, en tenant compte de l'inégalité évidente

$$Y(0, h) > Y(0, h_1),$$

on peut affirmer l'existence d'une valeur x_2 de x telle qu'on ait

$$Y(x, h) > Y(x, h_1) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x < x_2,$$
$$Y(x_2, h) = Y(x_2, h_1),$$

d'où l'on tire

$$\frac{dY(x,h)}{dx}\Big|_{x=x_2} = \frac{dY(x,h_1)}{dx}\Big|_{x=x_2}$$

On peut alors considérer au lieu de la courbe

$$y = Y(x, h_1)$$

celle qui est définie par les équations

$$y = Y(x, h_1) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x < x_2; \qquad y = Y(x, h) \quad \text{pour} \quad x \geqq x_2,$$

qui est aussi une courbe intégrale de (1) passant par le point $(0, h_1)$.

Quoi qu'il soit, on peut affirmer l'existence de la fonction $Y(x, h)$ qui possède les propriétés suivantes pour les valeurs de h assez petites et de x dans l'intervalle $(0, a_2)$:

$$\frac{dY(x,h)}{dx} = f(x, Y) \qquad (0 \leqq x \leqq a_2);$$
$$Y(0, h) = h;$$

$Y(x, h)$ est une fonction non decroissante de h, et

$$Y(x, h) > w(x) \quad \text{pour} \quad h > 0, \qquad 0 \leqq x \leqq a_2. \tag{19}$$

La fonction $Y(x, h)$ tend donc, pour $h \to 0$, vers une limite déterminée $y(x)$, et l'inégalité (19) nous donne:

$$y(x) = \lim_{h=0} Y(x, h) \geqq w(x) > 0 \qquad (0 < x \leqq a_2).$$

Or il est evident, que la courbe $y = y(x)$ ainsi construite, est une courbe intégrale de (1) passant par le point $(0, 0)$, car on a, les integrales étant prises au sens de M. Lebesgue:

$$y(x) = \lim_{h=0} Y(x, h) = \lim_{h=0} \{h + \int_0^x f(\xi, Y)\, d\xi\} = \int_0^x f(\xi, y)\, d\xi,$$

l'où l'on tire:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(0) = 0.$$

D'autre part, l'équation (A) ayant lieu, l'équation (1) admet la courbe ntègrale évidente passant par le même point (0, 0); à savoir:

$$y \equiv 0.$$

Le théorème d'unicité n'a pas donc lieu.

On peut aisément réduire les cas (β) et (γ) au cas (α): On pose cet effet:

$$y = -\eta \text{ dans le cas } (\beta) \text{ et } x = -\xi \text{ dans le cas } (\gamma).$$

On peut enfin se débarasser de la condition restrictive (A). Soit, en effet,

$$y = \eta_0(x)$$

une courbe intégrale de (1) qui passe par le point (0, 0). Si l'on pose

$$z = y - \eta_0(x),$$

on obtient pour z l'équation différentielle suivante

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z + \eta_0) - f(x, \eta_0) \equiv F(x, z); \quad z(0) = 0,$$

dont le second membre $F(x, z)$ vérifie la condition (A) [5]).

Pétrograd, Septembre 1919.

---

[5]) Nous devons ajouter que l'article de M. Painlevé dans „Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften", II. A. 4a, pp. 197—198, contient une citation brève du théorème de M. Osgood concernant le même sujet que le notre théorème, démontré au commencement de la note. Mais la théorème de M. Osgood est beaucoup moins général, que le nôtre, dont il n'est qu'un cas particulier [pour $\varphi(u) = ku\,|\log u|$, $ku\,|\log u|\,|\log|\log u||, \ldots$] et la méthode même de M. Osgood nous est tout à fait inconnue, les bibliothèques de Pétrograd ne possédant pas les „Monatshefte f. Math. u. Phys." 9 (1898) où le Mémoire de M. Osgood est inséré.

(Eingegangen am 27. August 1921.)

Sur la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires.

Par

J. Tamarkine à Pétrograd.

M. A. Kriloff a montré récemment[1]) l'importance pratique de la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires. Dans cette note nous allons étudier la méthode sousdite au point de vue théorique, à savoir: 1) établir la convergence de la méthode et 2) évaluer l'erreur commise.

Pour plus de simplicité nous ne considérons qu'une seule équation differentielle ordinaire du premier ordre à une fonction inconnue,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Des considérations analogues peuvent être appliquées immédiatement aux cas plus compliqués d'une équation et des systèmes d'équations d'ordres plus élevés.

Exposons d'abord l'idée fondamentale de la méthode de C. Störmer. On cherche une courbe intégrale de l'équation (1) qui passe par le point donné (x_0, y_0). On sait qu'une telle courbe existe toujours pour les valeurs de x comprises dans un intervalle $(x_0 - a, x_0 + a)$ assez petit et y est complétement déterminée; de plus, l'ordonnée y, considérée comme fonction de x admet les dérivées des $(n+1)$ ordres premiers, à condition que $f(x, y)$ admet les dérivées partielles des n ordres premiers pour tous les points d'un domaine k contenant dans son intérieur la courbe intégrale considérée. Dans ce qui va suivre on suppose toujours que les points considérées (x, y) sont situés dans le domaine k.

---

[1]) A. Kriloff, Sur l'intégration numérique approchée des équations différentielles ordinaires, Archive des sciences physiques (Moscou), 1918, pp. 68—119 [en russe].

Soit maintenant h un nombre positif, aussi petit que l'on veut, mais donné à l'avance. Posons

$$x_i = x_0 + ih \qquad (i = 1, 2 \ldots) \tag{2}$$

et désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_i, \ldots$ les valeurs correspondantes de y. La méthode de C. Störmer nous donne la valeur approchée de $y_{\varkappa+1}$ lorsqu'on sait déjà

$$y_0, y_1, \ldots, y_\varkappa. \tag{3}$$

Supposons, en effet, que les valeurs (3) sont connues et soit $x = x_\varkappa + \xi$. En désignant d'une manière générale par $y_i^{(\sigma)}$ l'expression

$$\left.\frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}\right|_{x=x_i},$$

on a évidemment

$$y(x) = y_\varkappa + \frac{\xi y_\varkappa^{(1)}}{1!} + \frac{\xi^2 y_\varkappa^{(2)}}{2!} + \ldots + \frac{\xi^n y_\varkappa^{(n)}}{n!} + O(\xi^{n+1}), \tag{4}$$ [2]

$$y'(x) = y_\varkappa^{(1)} + \frac{\xi y_\varkappa^{(2)}}{1!} + \frac{\xi^2 y_\varkappa^{(3)}}{2!} + \ldots + \frac{\xi^{n-1} y_\varkappa^{(n)}}{(n-1)!} + O(\xi^n). \tag{5}$$

Posons encore

$$\eta_i = h y_i^{(1)} = h f(x_i, y_i), \tag{6}$$

$$\Delta \eta_i = \eta_{i+1} - \eta_i, \ldots, \Delta^\sigma \eta_i = \Delta[\Delta^{\sigma-1} \eta_{i+1} - \Delta^{\sigma-1} \eta_i], \ldots. \tag{7}$$

Les valeurs (3) étant connues, la formule (6) nous donne

$$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_\varkappa$$

et les formules (7) — les valeurs

$$\Delta^\sigma \eta_0, \Delta^\sigma \eta_1, \ldots, \Delta^\sigma \eta_{\varkappa-\sigma}$$

respectivement, — *sans aucunes differentiations, en calculant seulement les différences successives des valeurs connues.*

La formule (4), si l'on y fait $x = x_{\varkappa+1}$; $\xi = h$, nous donne l'égalité:

$$y_{\varkappa+1} = y_\varkappa + \frac{h y_\varkappa^{(1)}}{1!} + \frac{h^2 y_\varkappa^{(2)}}{2!} + \ldots + \frac{h^n y_\varkappa^{(n)}}{n!} + O(h^{n+1}),$$

dont on peut exprimer le second membre sous la forme d'une combinaison linéaire de valeurs connues

$$\eta_\varkappa, \Delta \eta_{\varkappa-1}, \Delta^2 \eta_{\varkappa-2}, \ldots, \Delta^{n-1} \eta_{\varkappa-n+1},$$

aux coefficients constants et aux termes de la forme $O(h^{n+1})$ près, — et c'est là l'idée essentielle de la méthode de C. Störmer.

[2]) Le symbole $O(\alpha)$ désigne comme ordinairement, la quantité dont le rapport à α reste borné.

Posons à cet effet dans la formule (5)

$$x = x_{\varkappa-1}, x_{\varkappa-2}, x_{\varkappa-3}, \ldots; \quad \xi = -h, -2h, -3h, \ldots.$$

On en tire sans peine

$$(8)\quad \begin{cases} \underline{\eta_\varkappa = h y_\varkappa^{(1)},} \\ \eta_{\varkappa-1} = h y_{\varkappa-1}^{(1)} = h y_\varkappa^{(1)} - \dfrac{h^2 y_\varkappa^{(2)}}{1!} + \dfrac{h^3 y_\varkappa^{(3)}}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{h^n y_\varkappa^{(n)}}{(n-1)!} + O(\\ \eta_{\varkappa-2} = h y_{\varkappa-2}^{(1)} = h y_\varkappa^{(1)} - \dfrac{2h^2 y_\varkappa^{(2)}}{1!} + \dfrac{4h^3 y_\varkappa^{(3)}}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{2^{n-1} h^n y_\varkappa^{(n)}}{(n-1)!} + O(\\ \eta_{\varkappa-3} = h y_{\varkappa-3}^{(1)} = h y_\varkappa^{(1)} - \dfrac{3h^2 y_\varkappa^{(2)}}{1!} + \dfrac{9h^3 y_\varkappa^{(3)}}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{3^{n-1} h^n y_\varkappa^{(n)}}{(n-1)} + O(\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En prenant les différences on trouve:

$$(8_1)\quad \begin{cases} \underline{\Delta \eta_{\varkappa-1} = h^2 y_\varkappa^{(2)} - \dfrac{h^3 y_\varkappa^{(3)}}{2!} + \ldots + O(h^{n+1}),} \\ \Delta \eta_{\varkappa-2} = h^2 y_\varkappa^{(2)} - \dfrac{3h^3 y_\varkappa^{(3)}}{2!} + \ldots + O(h^{n+1}), \\ \Delta \eta_{\varkappa-3} = h^2 y_\varkappa^{(2)} - \dfrac{5h^3 y_\varkappa^{(3)}}{2!} + \ldots + O(h^{n+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et encore

$$(8_2)\quad \begin{cases} \underline{\Delta^2 \eta_{\varkappa-2} = h^3 y_\varkappa^{(3)} + \ldots + O(h^{n+1}),} \\ \Delta^2 \eta_{\varkappa-3} = h^3 y_\varkappa^{(3)} + \ldots + O(h^{n+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(8_3)\quad \begin{cases} \underline{\Delta^3 \eta_{\varkappa-3} = h^4 y_\varkappa^{(4)} + \ldots + O(h^{n+1}),} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(8_{n-1})\quad \underline{\Delta^{n-1} \eta_{\varkappa-n+1} = h^n y_\varkappa^{(n)} + O(h^{n+1}).}$$

Les égalitées soulignées nous donnent successivement

$$h^n y_\varkappa^{(n)}, h^{n-1} y_\varkappa^{(n-1)}, \ldots, h^4 y_\varkappa^{(4)}, h^3 y_\varkappa^{(3)}, h^2 y_\varkappa^{(2)}, h y_\varkappa^{(1)},$$

et nous pourrons écrire enfin

$$(9)\quad y_{\varkappa+1} = y_\varkappa + \alpha_1 \eta_\varkappa + \alpha_2 \Delta \eta_{\varkappa+1} + \ldots + \alpha_n \Delta^{n-1} \eta_{\varkappa-n+1} + O(h^{n+1}),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant des coefficients constants parfaitement déterminés. Par exemple, pour $n = 4$ on a:

$$y_{\varkappa+1} = y_\varkappa + \eta_\varkappa + \frac{1}{2} \Delta \eta_{\varkappa-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{\varkappa-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{\varkappa-3} + O(h^5).$$

Remarquons encore que si l'on augmente n, les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ déjà trouvés restent sans modifications, et il faudra seulement calculer les coefficients nouveaux $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$.

La formule (9) nous donne $y_{\varkappa+1}$, après quoi on a à calculer

$$\eta_{\varkappa+1} = h f(x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+1})$$

et continuer les calculs précédents sous le schema suivant:

No.	x	y	Δy	η	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$\varkappa-3$	$x_{\varkappa-3}$	$y_{\varkappa-3}$	.	$\eta_{\varkappa-3}$	.	.	.	.
			$\Delta y_{\varkappa-3}$		$\Delta \eta_{\varkappa-3}$	.	.	.
$\varkappa-2$	$x_{\varkappa-2}$	$y_{\varkappa-2}$		$\eta_{\varkappa-2}$		$\Delta^2 \eta_{\varkappa-3}$	.	.
			$\Delta y_{\varkappa-2}$		$\Delta \eta_{\varkappa-2}$		$\Delta^3 \eta_{\varkappa-3}$	.
$\varkappa-1$	$x_{\varkappa-1}$	$y_{\varkappa-1}$		$\eta_{\varkappa-1}$		$\Delta^3 \eta_{\varkappa-2}$		$\Delta^4 \eta_{\varkappa-3}$
			$\Delta y_{\varkappa-1}$		$\Delta \eta_{\varkappa-1}$		$\Delta^3 \eta_{\varkappa-2}$	.
$\varkappa$	$x_{\varkappa}$	$y_{\varkappa}$		$\eta_{\varkappa}$		$\Delta^2 \eta_{\varkappa-1}$	.	.
			$\Delta y_{\varkappa}$		$\Delta \eta_{\varkappa}$	.	.	.
$\varkappa+1$	$x_{\varkappa+1}$	$y_{\varkappa+1}$	.	$\eta_{\varkappa+1}$	.	.	.	.

Observons enfin que pour commencer par la méthode exposée il faut calculer préalablement les valeurs initiales

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1},$$

ce qu'on peut faire par une autre méthode quelconque d'intégration approchée.

Il ne faut pas oublier cependant que la valeur de $y_{\varkappa+1}$ ainsi trouvée n'est pas exacte; elle l'est seulement au terme $O(h^{n+1})$ près.

Pour évaluer l'erreur commise par cette méthode supposons que les valeurs déjà trouvées de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_\varkappa$ ne sont elles mêmes pas aussi exactes, et soient ε_i l'erreur de y_i, et Y_i la valeur approchée de y_i, de la façons qu'on ait

$$Y_i = y_i + \varepsilon_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Il faudra récrire toutes les formules précédentes en y remplaçant y_i par Y_i. On obtient ainsi l'algorithme suivant pour le calcul successif des Y_i:

$$Y_{\varkappa+1} = Y_\varkappa + \alpha_1 \bar{\eta}_\varkappa + \alpha_2 \Delta \bar{\eta}_{\varkappa-1} + \ldots + \alpha_n \Delta^{n-1} \bar{\eta}_{k-n+1} + O(h^{n+1}) \tag{11}$$

où l'on a posé

$$\bar{\eta}_i = h f(x_i, Y_i)$$

et calculé les valeurs connues aux termes de la forme $O(h^{n+1})$ près.

Si l'on exprime maintenant les quantités

$$\eta_x, \Delta\eta_{x-1}, \ldots, \Delta^{n-1}\eta_{x-n+1}; \quad \bar{\eta}_x, \Delta\bar{\eta}_{x-1}, \ldots, \Delta\bar{\eta}_{x-n+1}$$

en fonction de

$$f(x_x y_x),\ f(x_{x-1}, y_{x-1}),\ \ldots,\ f(x_{x-n+1}, y_{x-n+1});$$
$$f(x_x, Y_x),\ f(x_{x-1}, Y_{x-1}),\ \ldots,\ f(x_{x-n+1}, Y_{x-n+1})$$

respectivement, on tire sans peine de (9) et (11)

$$y_{x+1} = y_x + h[\beta_1 f(x_x, y_x) + \ldots + \beta_n f(x_{x-n+1}, y_{x-n+1})] + O(h^{n+1}),$$
$$Y_{x+1} = Y_x + h[\beta_1 f(x_x, Y_x) + \ldots + \beta_n f(x_{x-n+1}, Y_{x-n+1})] + O(h^{n+1}),$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ étant, comme $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des constantes parfaitement déterminées. En retranchant membre par membre et tenant compte de (10), on trouve:

$$(12)\quad \varepsilon_{x+1} = \varepsilon_x + h\sum_{i=0}^{n-1}\beta_{i+1}[f(x_{x-i}, Y_{x-i}) - f(x_{x-i}, y_{x-i})] + O(h^{n+1})$$
$$= \varepsilon_x + h\sum_{i=0}^{n-1}\beta_{i+1}\varepsilon_{x-i}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_{x-i},\ y=\bar{y}_{x-i}} + O(h^{n+1}),$$

$\bar{y}_i$ désignant une valeur comprise entre y_i et Y_i.

Désignons par M une limite supérieure de toutes les quantités

$$\beta_i\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour les valeurs de x, y comprises dans le domaine R. Soit encore M_1 une constante positive telle que le terme complémentaire $O(h^{n+1})$ dans la formule (12) soit $< M_1 h^{n+1}$ en valeur absolue. On trouve sans peine

$$|\varepsilon_{x+1}| < |\varepsilon_x| + Mh\sum_{i=0}^{n-1}|\varepsilon_{x-i}| + M_1 h^{n+1}.$$

Si l'on pose maintenant

$$(13)\qquad \delta_{x+1} = \delta_x + Mhn\delta_x + M_1 h^{n+1} \qquad (x \geqq n-1),$$

les valeurs $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ étant prises d'une façon arbitraire, mais sous les conditions

$$\delta_0 \geqq |\varepsilon_0|, \ldots, \delta_{n-1} \geqq |\varepsilon_{n-1}|; \quad \delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_{n-1};$$

on a évidemment

$$|\varepsilon_i| < \delta_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1, \ldots, x, \ldots).$$

D'autre part, l'equation (13) aux différences finies nous donne sans peine

$$(14)\qquad \delta_i = \left(\delta_{n-1} + \frac{M_1 h^n}{Mn}\right)(1 + Mhn)^{i-n+1} - \frac{M_1 h^n}{Mn} \qquad (i \geqq n-1)$$

t si l'on suppose que les erreurs des valeurs initiales sont d'ordre h^n u plus, on peut faire

$$\delta_{n-1} < N_1 \cdot \frac{h^n M_1}{Mn},$$

'où l'on tire, eu égard à (14):

$$\delta_i < h^n \cdot \frac{M_1}{Mn} [(N_1+1)(1+Mhn)^{i-n+1}-1] \qquad (i \geqq n-1).$$

Or on a

$$x_i - x_0 = ih \leqq a; \qquad h \leqq \frac{a}{i},$$

$$(1+Mhn)^{i-n+1} < \left(1+\frac{Man}{i}\right)^i < e^{Man} \qquad (i \geqq n-1),$$

e qui nous permet d'écrire:

$$\delta_i < Nh^n \qquad (i \geqq n-1), \tag{15}$$

N étant une constante positive fixe, ne dépendant ni de h, ni de i.

L'inégalité (15) nous montre que *l'erreur commise par l'algorithme e C. Störmer est d'ordre h^n au plus* et que *la méthode* elle même *est onvergente*, c'est à dire que si l'on fixe une valeur de $x = X > x_0$, et on pose $h = \frac{X-x_0}{m}$, m étant un entier suffisamment grand, la valeur pprochée Y_m de l'ordonnée de la courbe intégrale, fournie par la méthode e C. Störmer, sera aussi proche que l'on veut de la valeur exacte y t tendra vers cette dernière pour $m = \infty$.

Pétrograd, Septembre 1919.

(Eingegangen am 1. August 1921.)

Momentprobleme für ein endliches Intervall.

Von

Felix Hausdorff in Bonn.

Ist die Funktion $\chi(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ von beschränkte Schwankung, so heißen die durch Stieltjessche Integrale definierten Zahle

$$\mu_k = \int_0^1 x^k d\chi(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots$$

die *Momente* der *Belegungsfunktion* $\chi(x)$. Ist insbesondere $\chi(x) = \int_0^x \varphi(x)\, d$ das Integral einer (im Lebesgueschen Sinne) integrablen Funktion $\varphi(x)$ so heißen die Zahlen

$$\mu_k = \int_0^1 x^k \varphi(x)\, dx$$

die *Momente* der *Dichtigkeitsfunktion* $\varphi(x)$. Die Bestimmung von $\chi(x$ oder $\varphi(x)$ aus vorgeschriebenen Momenten ist das Momentproblem fü das Intervall $[0, 1]$.

Das Momentproblem einer monotonen Belegungsfunktion für das ein seitig unbegrenzte Intervall $[0, \infty)$ ist bekanntlich von Stieltjes[1]) ge stellt und gelöst worden; den Fall des beiderseits unbegrenzten Intervall $(-\infty, +\infty)$ hat zuerst Herr Hamburger[2]) erledigt. Stieltjes, wi seine Vorgänger und Nachfolger, approximiert die gesuchte Funktion $\chi(x$ durch solche „Treppenfunktionen" (d. h. bis auf endlich viele Sprüng konstante Funktionen) $\chi_p(x)$, die eine mit wachsendem $p = 1, 2, 3, \ldots$ gleichfalls wachsende Zahl anfänglicher Momente *genau* ergeben, etwa

$$\mu_k = \int x^k d\chi_p(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2p$$

---

[1]) Stieltjes, T. J.: Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Toulouse (1894), S. 1–122; 9 (1895), S. 1–47.

[2]) Hamburger, H: Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momente problems I II III, Math. Ann. 81 (1920), S. 235–319; 82 (1921), S. 120–164, 168–18

iese Methode bedingt den Zusammenhang mit der Kettenbruchtheorie, nn die Sprungstellen jener Annäherungsfunktionen sind die Nullstellen n Polynomen, die als Nenner in den Näherungsbrüchen gewisser Kettenuchentwicklungen für die analytische Funktion

$$\int \frac{d\chi(x)}{z-x} \sim \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \dots$$

ftreten.

Im Laufe einer Untersuchung[3]), die eigentlich ein anderes Ziel hatte, urde ich indirekt auf das Momentproblem für das Intervall $[0, 1]$ gehrt und bemerkte, daß dieses zwar durch Stieltjes mitgelöste Problem ch auch ohne jenen umfänglichen algebraischen und funktionentheoreschen Apparat in fast elementarer Weise behandeln läßt. Die Treppenktionen $\chi_p(x)$, durch die ich $\chi(x)$ annähere, liefern allerdings keinen bschnitt der Momentfolge genau, sondern ihre Momente $\int_0^1 x^k d\chi_p(x)$ nvergieren nur, für $p \to \infty$, gegen die vorgeschriebenen Momente μ_k afür aber sind sie wesentlich einfacher als die Stieltjesschen; die rungstellen von $\chi_p(x)$ sind die äquidistanten Teilpunkte $\frac{m}{p}$ $(m = 0, 1, \dots, p)$ s Intervalls, und ihre Sprünge $\lambda_{p,m}$ einfache *lineare* Verbindungen ifferenzen höherer Ordnung, mit Zahlfaktoren) der vorgeschriebenen omente. Diese Größen $\lambda_{p,m}$ sind in meiner Behandlungsweise von ausschlaggebender Bedeutung, indem sie die einfachsten Kriterien dafür zu lden gestatten, daß das Momentproblem durch eine monotone Belegungsnktion oder eine solche von beschränkter Schwankung lösbar ist.

In der vorliegenden Arbeit will ich mit Hilfe derselben $\lambda_{p,m}$ auch riterien für Lösbarkeit des Momentproblems durch eine *Dichtigkeitsnktion* $\varphi(x)$ aufstellen, die entweder schlechthin integrabel oder — eine rch Herrn F. Riesz[4]) veranlaßte Fragestellung — in einer höheren tenz integrabel ist. Neben der vorhin erwähnten Lösung des Momentoblems, die ich noch einmal in vereinfachter Fassung auseinandersetze, nutze ich noch andere Lösungsformen, bei denen die approximierenden (x) nicht Treppenfunktionen, sondern Polynome sind und die schließlich f die Darstellung von $\chi(x)$ durch die integrierte Legendresche Reihe r Belegungsfunktion $\chi(x)$ hinauslaufen. Endlich übertrage ich meine ethode auf das trigonometrische oder Fouriersche Momentproblem, wie an es nennen kann, nämlich auf die Bestimmung einer Belegungsfunktion $\chi(t)$

---

[3]) Hausdorff, F.: Summationsmethoden und Momentfolgen I II, Math. Zeitschr. (1921), S. 74—109, 280—299.

[4]) Riesz, F.: Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. n. 69 (1910), S. 449—497.

oder Dichtigkeitsfunktion $\varphi(t)$ aus ihren trigonometrischen Momenten d. h. Fourierkoeffizienten

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,d\chi(t), \qquad \mu_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\varphi(t)\,dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

wobei die entsprechenden Kriterien für Existenz eines $\chi(t)$ oder $\varphi(t$ vorgeschriebener Art herauskommen.

Das Stieltjessche Momentproblem für das Intervall [0, 1].

§ 1.

$\chi(x)$ monoton.

Wenn eine Folge reeller oder komplexer Zahlen $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ vor gegeben ist, ordnen wir jedem Polynom

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$$

die Zahl

$$Mf(x) = Mf = \alpha_0\mu_0 + \alpha_1\mu_1 + \ldots + \alpha_n\mu_n$$

zu und nennen sie kurz das *Moment* von $f(x)$.

Das Momentproblem verlangt, eine Funktion $\chi(x)$ von beschränkte Schwankung — eventuell eine monotone, mit wachsendem x nicht ab nehmende Funktion $\chi(x)$ — derart zu finden, daß für jedes Polynom

$$\int_0^1 f(x)\,d\chi(x) = Mf. \tag{1}$$

Da die Änderung von $\chi(x)$ um eine additive Konstante und di Werte von $\chi(x)$ an den Sprungstellen im Innern des Intervalls auf di Stieltjesintegrale ohne Einfluß sind, so wollen wir diese Unbestimmthei durch folgende Normierung beseitigen:

$$\chi(0) = 0, \qquad \chi(x) = \tfrac{1}{2}\chi(x-0) + \tfrac{1}{2}\chi(x+0) \quad (0 < x < 1) \tag{2}$$

Dann kann höchstens eine einzige Lösung existieren (wie auch aus de Stieltjesschen Theorie folgt, von der wir aber nichts voraussetzen) Denn aus (1) folgt durch partielle Integration

$$Mf = f(1)\chi(1) - \int_0^1 f'(x)\chi(x)\,dx \tag{3}$$

und weiter mit $\omega(x) = \int_0^x \chi(x)\,dx$:

$$\begin{aligned} Mf &= f(1)\chi(1) - f'(1)\omega(1) + \int_0^1 f''(x)\omega(x)\,dx \\ &= f(1)\mu_0 - f'(1)(\mu_0 - \mu_1) + \int_0^1 f''(x)\omega(x)\,dx, \end{aligned}$$

wie man durch die Substitutionen $f(x)=1$, $f(x)=x-1$ erkennt. Hiernach sind bei vorgegebenen μ_k alle Integrale $\int_0^1 x^k \omega(x)\,dx$ $(k=0,1,2,\ldots)$ bekannt und dadurch die stetige Funktion $\omega(x)$ eindeutig bestimmt (Satz von M. Lerch, unmittelbare Folge der Approximierbarkeit stetiger Funktionen durch Polynome). Ist also $\chi(x)$ eine Lösung, so ist an jeder ihrer Stetigkeitsstellen $\chi(x)=\omega'(x)$ bekannt, auf Grund von (2) auch an den Sprungstellen zwischen 0 und 1, und $\chi(0)=0$ sowie $\chi(1)=\mu_0$ sind von vornherein bekannt.

Zur Existenz einer *monotonen* Belegungsfunktion $\chi(x)$ ist nun offenbar notwendig, daß jedes Polynom $f(x)$, das im Intervall $[0,1]$ nirgends negativ ist, ein nichtnegatives Moment habe[5]). Speziell müssen die Polynome $x^m(1-x)^n$ $(m,n=0,1,2,\ldots)$ nichtnegative Momente haben, d. h. die Differenzen

$$\mu_{m,n}=\mu_m-\binom{n}{1}\mu_{m+1}+\binom{n}{2}\mu_{m+2}-\ldots+(-1)^n\mu_{m+n}$$

$\geqq 0$ sein; eine Folge μ_n dieser Art heiße *total monoton*. Setzen wir für $p=0,1,2,\ldots;\ m=0,1,\ldots,p$

4) $$\lambda_{p,m}(x)=\binom{p}{m}x^m(1-x)^{p-m},$$

5) $$\lambda_{p,m}=M\lambda_{p,m}(x)=\binom{p}{m}\mu_{m,p-m},$$

so ist

A) $$\lambda_{p,m}\geqq 0$$

die Bedingung der totalen Monotonie und eine notwendige Bedingung für

[5]) Diese Forderung ist damit äquivalent, daß für jedes Polynom

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_n x^n$$

mit reellen Koeffizienten die Momente

$$Mxf(x)^2,\qquad M(1-x)f(x)^2$$

oder auch die Momente

$$Mf(x)^2,\qquad Mx(1-x)f(x)^2$$

nichtnegativ seien. Soll $\chi(x)$ unendlich viele Wachstumsstellen haben, also keine Treppenfunktion sein, so müssen die genannten quadratischen Formen der Variablen $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ nicht nur nichtnegativ, sondern definit positiv sein, und man erhält die Determinantenbedingungen der Stieltjesschen Theorie. Diese geben zugleich der Reihe nach die Intervalle, in denen die Elemente μ_n einer total monotonen Folge variieren können ($\xi_n<\mu_n<\eta_n$, wo ξ_n,η_n von $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$ abhängen). Daß diese Formenbedingungen durch abzählbar viele, in den μ_n lineare Ungleichungen — wie z. B. unsere Bedingungen (A) — ersetzbar sind, ist an sich natürlich nichts Merkwürdiges; man könnte sich ja auf ganzzahlige $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ beschränken.

Existenz einer monotonen Belegungsfunktion mit den vorgeschriebenen Momenten.

Wir werden sehen, daß dies auch hinreicht. Zunächst ist zu zeigen, daß auf Grund von (A) jedes in $[0,1]$ nichtnegative Polynom ein nichtnegatives Moment hat.

Jedes Polynom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

läßt sich, sobald p mindestens gleich seinem Grade n ist, auf eine einzige Art in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{m=0}^{p} a_m \lambda_{p,m}(x) \tag{6}$$

darstellen, die wir seine *p-Form* nennen wollen. Für die (auch von p abhängigen) Koeffizienten ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$a_m = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{m!\,(p-k)!}{p!\,(m-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{p(p-1)\dots(p-k+1)}$$

oder $a_m = f_p\left(\frac{m}{p}\right)$, wenn für den Augenblick

$$f_p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{px(px-1)\dots(px-k+1)}{p(p-1)\dots(p-k+1)}$$

gesetzt wird. Da nun im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichmäßig $\frac{px-h}{p-h}$ nach x und folglich $f_p(x)$ nach $f(x)$ konvergiert, so ist, für hinreichend großes p, $\left|a_m - f\left(\frac{m}{p}\right)\right| < \varepsilon$ für alle Werte $m = 0, 1, \dots, p$. Daraus schließen wir:

Wenn das Polynom $f(x)$ im Intervall $[0,1]$ positiv ist, so hat seine p-Form für genügend großes p lauter positive Koeffizienten[6]).

Vermöge

$$Mf = \sum_{m=0}^{p} a_m \lambda_{p,m} \tag{7}$$

ist also, wenn (A) erfüllt ist, das Moment jedes in $[0,1]$ positiven (und, wie daraus unmittelbar folgt, auch jedes nichtnegativen) Polynoms nichtnegativ.

Ferner aber folgt, wenn p so groß gewählt wird, daß $\left|a_m - f\left(\frac{m}{p}\right)\right| < \varepsilon$:

$$\left|Mf - \sum_{m=0}^{p} f\left(\frac{m}{p}\right)\lambda_{p,m}\right| \leqq \varepsilon \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} = \varepsilon \mu_0,$$

[6]) Ein anderer Beweis a. a. O. [3]), S. 98. Die in $[0,1]$ nichtnegativen Polynome bilden einen konvexen Bereich, von dem also jeder innere „Punkt“ als Schwerpunkt von Randpunkten $\lambda_{p,m}(x)$ mit positiven Massen darstellbar ist.

also

$$\sum_{m=0}^{p} f\left(\frac{m}{p}\right)\lambda_{p,m} \to Mf \qquad (p \to \infty) \tag{8}$$

für jedes Polynom.

Erste Lösung. Die Gleichung (8) liefert sofort eine *Lösung des Momentproblems durch approximierende Treppenfunktionen.* Es sei $\chi_p(x)$ die Funktion, die an den Stellen $\frac{m}{p}$ $(m = 0, 1, \ldots, p)$ die Sprünge $\lambda_{p,m}$ macht, sonst konstant ist und den Bedingungen (2) genügt, also, ausführlich geschrieben:

$$\chi_p(0) = 0, \qquad \chi_p(1) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} = \mu_0,$$

und für $0 < x < 1$

$$\chi_p(x-0) = \sum_{\frac{m}{p} < x} \lambda_{p,m}, \qquad \chi_p(x+0) = \sum_{\frac{m}{p} \leqq x} \lambda_{p,m},$$

$$\chi_p(x) = \frac{1}{2}\chi_p(x-0) + \frac{1}{2}\chi_p(x+0).$$

Mit diesen monotonen Funktionen schreibt sich (8)

$$\int_0^1 f(x)\,d\chi_p(x) \to Mf. \tag{9}$$

Aus der Folge der *gleichmäßig beschränkten* monotonen Funktionen $\chi_p(x)$ (es ist ja $0 \leqq \chi_p(x) \leqq \mu_0$) läßt sich nun nach dem *Hellyschen Auswahlsatz*[7]) eine durchweg konvergente Teilfolge $\chi_q(x)$ herausheben, deren Limes

$$\bar{\chi}(x) = \lim \chi_q(x)$$

natürlich wieder monoton ist und an den Stellen 0, 1 die Werte $0, \mu_0$ annimmt, jedoch vielleicht nicht der Forderung (2) des arithmetischen Mittels an den Sprungstellen genügt. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der $\chi_p(x)$ konvergiert aber bekanntlich für jedes Polynom $\int_0^1 f'(x)\chi_q(x)\,dx$ nach $\int_0^1 f'(x)\bar{\chi}(x)\,dx$ und wegen (3) also $\int_0^1 f(x)\,d\chi_q(x)$ nach $\int_0^1 f(x)\,d\bar{\chi}(x)$; auf Grund von (9) ist also $\bar{\chi}(x)$ eine Lösung des Momentproblems.

Wir wissen aber, daß es mit der Normierung (2) nur eine einzige Lösung $\chi(x)$ gibt. An jeder Stetigkeitsstelle von $\chi(x)$ ist also

$$\bar{\chi}(x) = \lim \chi_q(x) = \chi(x),$$

---

[7]) Helly, E.: Über lineare Funktionaloperationen, Wiener Akad. Ber. **121** (1912), S. 265–297. Der Satz ist völlig elementaren Charakters.

d. h. die Folge der $\chi_p(x)$ enthält eine nach $\chi(x)$ konvergente Teilfolge, und da dies auch von jeder Teilfolge der $\chi_p(x)$ gilt, so ergibt sich die Konvergenz der ganzen Folge $\chi_p(x)$: an jeder Stetigkeitsstelle von $\chi(x)$ ist

$$\chi(x) = \lim \chi_p(x). \tag{10}$$

Wir wollen doch den Nebenumstand hervorheben, daß (10) *überall* gilt, auch an den Sprungstellen zwischen 0 und 1 (für $x = 0$ und $x = 1$ gilt sie ebenfalls). Betrachten wir zuerst eine Treppenfunktion mit einem einzigen Sprung 1 an der Stelle ξ $(0 < \xi < 1)$; $\chi(x, \xi)$ sei diese Funktion (gleich $\frac{0}{1}$ für $x \leqq \xi$, gleich $\frac{1}{2}$ für $x = \xi$). Ihre Momente sind $\mu_k = \xi^k$, die entsprechenden $\lambda_{p,m} = \lambda_{p,m}(\xi)$, die zugehörige p-te Treppenfunktion also für $0 < x < 1$

$$\chi_p(x, \xi) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{m<px} + \sum_{m\leqq px}\Big)\lambda_{p,m}(\xi).$$

Daß nun, wie verlangt wird, $\chi_p(\xi, \xi) \to \frac{1}{2}$, ist aus Untersuchungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt: $\sum\limits_{m<p\xi} \lambda_{p,m}(\xi)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis von der Wahrscheinlichkeit ξ bei p Versuchen in einer relativen Häufigkeit $< \xi$ eintrete, und konvergiert mit wachsendem p nach $\frac{1}{2}$, ebenso $\sum\limits_{m\leqq p\xi} \lambda_{p,m}(\xi)$. — Ist sodann $\chi(x)$ eine monotone Funktion, die an der Stelle ξ den Sprung $\delta = \chi(\xi + 0) - \chi(\xi - 0)$ macht, während zugleich $\chi(\xi) = \frac{1}{2}\chi(\xi - 0) + \frac{1}{2}\chi(\xi + 0)$, so ist die monotone Funktion $\chi(x) - \delta\chi(x, \xi)$ an der Stelle ξ stetig, und die Anwendung von (10) auf diese Funktion an der Stelle ξ gibt $\chi_p(\xi) \to \chi(\xi)$.

Wir haben mit dem Bisherigen den Satz bewiesen:

I. *Die Zahlen μ_n sind dann und nur dann die Momente einer monotonen Belegungsfunktion $\chi(x)$, wenn sie eine total monotone Folge bilden, d. h. die Ungleichungen* (A) *erfüllen.*

Die Lösung ist durch (10) gegeben, wo $\chi_p(x)$ die Treppenfunktion bedeutet, die an den Stellen $\frac{m}{p}$ die Sprünge $\lambda_{p,m}$ macht $(m = 0, 1, \ldots, p)$.

Im Vorbeigehen sei ohne Beweis erwähnt, daß auch die Sprünge der Funktion $\chi(x)$ und die Werte ihrer Ableitung $\chi'(x)$ (wo diese existiert, d. i. überall bis auf eine Menge vom Maße Null) sich sehr einfach durch die $\lambda_{p,m}$ ausdrücken lassen. Man hat nämlich für $0 < x < 1$

$$\sqrt{p+1}\,\lambda_{p,m} \to [\chi(x+0) - \chi(x-0)] : \sqrt{2\pi x(1-x)}$$
$$(p+1)\,\lambda_{p,m} \to \chi'(x),$$

wobei m mit p derart variiert, daß $\sqrt{p}\left(\frac{m}{p} - x\right) \to 0$.

Wie wir in der Einleitung hervorhoben, geben unsere approximierenden Lösungen $\chi_p(x)$ nicht, wie bei Stieltjes, den Anfang der Momentfolge exakt, sondern nur angenähert im Sinne der Gleichung (9). Dies läßt uns einen größeren Spielraum in der Wahl der $\chi_p(x)$, für die wir jetzt statt Treppenfunktionen Polynome setzen wollen.

Zweite Lösung. Das Polynom

$$\varphi_p(x) = (p+1)\sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\lambda_{p,m}(x) \tag{11}$$

ist auf Grund der Bedingungen (A) nichtnegativ im Intervall $[0, 1]$, das Polynom

$$\chi_p(x) = \int_0^x \varphi_p(x)\,dx \tag{12}$$

monoton[8]). Man hat $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^k\,d\chi_p(x) &= \int_0^1 x^k \varphi_p(x)\,dx \\ &= (p+1)\sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\binom{p}{m}\int_0^1 x^{k+m}(1-x)^{p-m}\,dx \\ &= (p+1)\sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\binom{p}{m}\frac{(m+k)!\,(p-m)!}{(p+k+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{(p+2)(p+3)\ldots(p+k+1)},\end{aligned}$$

welcher Ausdruck infolge von $\sum_{m=0}^{p}\lambda_{p,m}\left(\frac{m}{p}\right)^k \to \mu_k$ ebenfalls nach μ_k konvergiert (vgl. (8)). Also gilt auch mit diesen $\chi_p(x)$ die Relation (9); wegen $\chi_p(0) = 0$, $\chi_p(1) = \mu_0$ sind die monotonen Polynome $\chi_p(x)$ gleichmäßig beschränkt, und dieselben Überlegungen wie oben führen zur Darstellung (10). Die Gültigkeit auch an den Sprungstellen wird aus den Schlußbemerkungen dieses Paragraphen hervorgehen.

Wir wollen diese Lösung, bei der $\chi(x)$ als Grenzfunktion monotoner Polynome erscheint, mit Hilfe der *Legendreschen Polynome*

$$L_p(x) = \frac{1}{p!}\frac{d^p}{dx^p}[x(x-1)]^p = P_p(2x-1)$$

des Intervalls $[0, 1]$ ausdrücken; $P_p(\xi)$ ist das gewöhnliche, auf das

[8]) Wir verwenden in den verschiedenen Lösungen dieselben Bezeichnungen $\chi_p(x)$, $\varphi_p(x)$ für die approximierenden Belegungs- und Dichtigkeitsfunktionen.

Intervall $[-1, 1]$ bezügliche Legendresche Polynom p-ten Grades. Setzen wir

$$\varphi_p(x, y) = (p+1)\sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}(x)\,\lambda_{p,m}(y),$$

so kommt mit

$$x = \cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad y = \cos^2\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{1}{p+1}\varphi_p(x,y) = \sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2m}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2p-2m}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}e^{it}\right)^p\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}e^{-it}\right)^p dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^p dt,$$

wo

$$\zeta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos t \tag{13}$$

gesetzt ist. Auf Grund der bekannten Formeln

$$\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^p = \sum_{m=0}^{p}\frac{p!^2}{(p-m)!\,(p+m+1)!}(2m+1)\,P_m(\zeta)$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_m(\zeta)\,dt = P_m(\cos\alpha)\,P_m(\cos\beta) \tag{14}$$

erhält man also

$$\varphi_p(x,y) = \sum_{m=0}^{p}\frac{p!\,(p+1)!}{(p-m)!\,(p+m+1)!}(2m+1)\,L_m(x)\,L_m(y) \tag{15}$$

$$= (p+1)\sum_{m=0}^{p}\lambda_{p,m}(x)\,\lambda_{p,m}(y);$$

wenn man das Moment (nach y) nimmt und die Momente der Legendreschen Polynome mit

$$\lambda_m = M\,L_m(x)$$

bezeichnet, ergibt sich

$$\varphi_p(x) = \sum_{m=0}^{p}\frac{p!\,(p+1)!}{(p-m)!\,(p+m+1)!}(2m+1)\,\lambda_m L_m(x) \tag{16}$$

$$= (p+1)\sum_{m=0}^{p}\lambda_{p,m}\lambda_{p,m}(x)$$

ls Darstellung des Polynoms (11) durch Legendresche Polynome. Man rhält hieraus wegen der Orthogonalität der Legendreschen Polynome

$$\int_0^1 L_m(x)\varphi_p(x)dx = \frac{p!\,(p+1)!}{(p-m)!\,(p+m+1)!}\lambda_m$$
$$= \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{(p+2)(p+3)\dots(p+m+1)}\lambda_m,$$

vas mit $p\to\infty$ nach λ_m konvergiert und abermals die Formel (9) beweist. Die Reihe

(17) $$u_0+u_1+u_2+\dots = \lambda_0 L_0(x)+3\lambda_1 L_1(x)+5\lambda_2 L_2(x)+\dots$$

st die Legendresche Reihe der *Belegungsfunktion* $\chi(x)$, wenn

$$\lambda_m = \int_0^1 L_m(x)\,d\chi(x),$$

esp. der *Dichtigkeitsfunktion* $\varphi(x)$, wenn $\chi(x)=\int^x \varphi(x)\,dx$ ein Integral nd

$$\lambda_m = \int_0^1 L_m(x)\varphi(x)\,dx$$

st. Von der Reihe (17) ist nun

$$\varphi_p(x) = \sum_{m=0}^{p}\frac{p!\,(p+1)!}{(p-m)!\,(p+m+1)!}u_m$$
$$= u_0+\frac{p}{p+2}u_1+\frac{p(p-1)}{(p+2)(p+3)}u_2+\dots+\frac{p!\,(p+1)!}{(2p+1)!}u_p$$

ie nach der Methode des Herrn de la Vallée Poussin[9]) gebildete p-te umme, und die Formel (10) läßt sich also so aussprechen: die aus (17) urch gliedweise Integration hervorgehende Reihe

(18) $$\lambda_0\int_0^x L_0(x)dx+3\lambda_1\int_0^x L_1(x)dx+5\lambda_2\int_0^x L_2(x)dx+\dots$$

st nach de la Vallée Poussin summierbar und liefert als Summe die Belegungsfunktion $\chi(x)$ mit den vorgeschriebenen (eine total monotone Folge bildenden) Momenten μ_k.

---

[9]) Ch.-J. de la Vallée Poussin: Sur l'approximation des fonctions d'une ariable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de ourier, Bull. classe des sciences Acad. Roy. Belg., 1908, S. 193–254. Unsere von er dortigen unwesentlich abweichende Erklärung der Summe findet sich auch bei I. Plancherel: Sur la sommation des séries de Laplace et de Legendre, Rend. Palermo 33 (1912), S. 41–66.

Dritte Lösung. Man kann die zweite Lösung so modifizieren, da man mit Cesàroscher oder Hölderscher Summation der Reihe (18) zum Ziele kommt. Es bedeute

$$S^\alpha u_n = u_n + \binom{\alpha}{1} u_{n-1} + \binom{\alpha+1}{2} u_{n-2} + \cdots + \binom{\alpha+n-1}{n} u_0$$

die Cesàrosche Summe α-ter Ordnung der Folge u_n. Herr Fejér[10]) ha bewiesen, daß

$$S^3(2n+1)P_n(\zeta) \geqq 0,$$

wenn ζ im Intervall $[-1, 1]$ liegt, und aus (13), (14) schließt man, da auch

$$S^3(2n+1)P_n(\xi)P_n(\eta) \geqq 0,$$

wenn ξ, η im Intervall $[-1, 1]$ liegen. D. h. die Cesàroschen Mitte zweiter Ordnung der Partialsummen der Reihe

$$\Sigma(2n+1)L_n(x)L_n(y)$$

sind $\geqq 0$, falls x, y dem Intervall $[0, 1]$ angehören; es sind dies di Polynome

$$(19) \qquad \varphi_p(x, y) = \sum_{m=0}^{p} \frac{(p-m+1)(p-m+2)}{(p+1)(p+2)}(2m+1)L_m(x)L_m(y).$$

Wenn also die Folge μ_n total monoton ist, so sind die Momente diese Polynome nach y, d. h. die Polynome

$$(20) \qquad \varphi_p(x) = \sum_{m=0}^{p} \frac{(p-m+1)(p-m+2)}{(p+1)(p+2)}(2m+1)\lambda_m L_m(x)$$

nicht negativ, die Polynome (12) $\chi_p(x) = \int_0^x \varphi_p(x)dx$ monoton, und da $(p \geqq m)$

$$\int_0^1 L_m(x)\,d\chi_p(x) = \int_0^1 L_m(x)\,\varphi_p(x)\,dx = \frac{(p-m+1)(p-m+2)}{(p+1)(p+2)}\lambda_m$$

für $p \to \infty$ nach λ_m konvergiert, so bleibt (9) auch hier gültig. Di gleichmäßige Beschränktheit der $\chi_p(x)$ — wegen $\chi_p(0) = 0$, $\chi_p(1) = \lambda_0 = \mu$ — führt wieder zu (10), die Reihe (18) ist nach Cesàro oder Hölde von zweiter Ordnung summierbar und liefert als Summe die Belegungs funktion $\chi(x)$, auch an den Sprungstellen, wie sich sofort ergeben wird.

In Wahrheit ist die Reihe (18) sogar konvergent. Bezeichnen wi die mit der *Dichtigkeitsfunktion* $\chi(x)$ gebildeten Momente durch einen Stern, so daß (3) die Gestalt

$$Mf = \mu_0 f(1) - M^* f'$$

[10]) Fejér, L.: Über die Laplacesche Reihe, Math. Ann., 67 (1909), S. 76—109

nnimmt, so erhalten wir für $m \geqq 1$ und

$$f(x) = \frac{1}{2} L_{m+1}(x) - \frac{1}{2} L_{m-1}(x) = (2m+1) \int_0^x L_m(x)\, dx:$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_{m+1} - \lambda_{m-1}) = -(2m+1)\lambda_m^*$$

nd daraus durch eine einfache Rechnung

$$n+1)\lambda_m \int_0^x L_m(x)\, dx = \sum_{m=0}^{p} (2m+1)\lambda_m^* L_m(x) + \frac{1}{2}\lambda_p L_{p+1}(x) + \frac{1}{2}\lambda_{p+1} L_p(x).$$

Wegen $|L_p(x)| \leqq 1$ ist $|\lambda_p| \leqq \mu_0$ beschränkt. Ist x ein innerer Punkt es Intervalls $(0 < x < 1)$, so ist $L_p(x) \to 0$, die beiden Zusatzglieder echts konvergieren nach 0. Bekanntlich ist ferner die Legendresche eihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\lambda_m^* L_m(x)$$

er monotonen Dichtigkeitsfunktion $\chi(x)$ in jedem innern Punkte kon-ergent[11]) mit der Summe $\frac{1}{2}\chi(x-0) + \frac{1}{2}\chi(x+0) = \chi(x)$. Also ist auch

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\lambda_m \int_0^x L_m(x)\, dx = \chi(x)$$

n inneren Punkten, überdies auch für $x = 0$ und $x = 1$.

Die Belegungsfunktion $\chi(x)$, deren Existenz durch den Satz I ge-ichert ist, ist also einfach die Summe der Reihe (18).

§ 2.

$\chi(x)$ von beschränkter Schwankung.

Soll das Momentproblem (1) durch eine reelle Funktion beschränkter chwankung

$$\chi(x) = \chi^1(x) - \chi^2(x)$$

$\chi^1(x)$, $\chi^2(x)$ monoton, d. h. mit wachsendem x nicht abnehmend) lösbar ein, so erhält man mit evidenter Bezeichnung

$$\lambda_{p,m} = \lambda^1_{p,m} - \lambda^2_{p,m},$$

$$\sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m}| \leqq \sum_{m=0}^{p} \lambda^1_{p,m} + \sum_{m=0}^{p} \lambda^2_{p,m} = \mu_0^1 + \mu_0^2,$$

[11]) Da ihre Glieder, wie leicht zu sehen, $= O\left(\frac{1}{m}\right)$ sind, kann man aus ihrer ummierbarkeit irgendwelcher Ordnung auf Konvergenz, sogar auf Summierbarkeit egativer Ordnung > -1 schließen (Satz von Hardy-Littlewood).

also

$$\text{(B)} \qquad \sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m}| \text{ beschränkt } \leqq L.$$

Daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, geht aus folgende Schlüssen hervor.

Zunächst folgt aus (6), (7), wenn p so groß gewählt wird, da $\left|a_m - f\left(\frac{m}{p}\right)\right| < \varepsilon$:

$$\left| Mf - \sum_{m=0}^{p} f\left(\frac{m}{p}\right)\lambda_{p,m} \right| \leqq \varepsilon \sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m}| \leqq \varepsilon L,$$

so daß auch hier die Limesgleichung (8) besteht. Nun setze man

$$\lambda'_{p,m} = \frac{1}{2}|\lambda_{p,m}| + \frac{1}{2}\lambda_{p,m}, \qquad \lambda''_{p,m} = \frac{1}{2}|\lambda_{p,m}| - \frac{1}{2}\lambda_{p,m};$$

diese Zahlen sind $\geqq 0$ (jedoch noch nicht etwa die mit monotonen Funk tionen gebildeten Momente von $\lambda_{p,m}(x)$!). Sodann seien $\chi'_p(x)$, $\chi''_p(x$ die monotonen Treppenfunktionen, die an den Stellen $\frac{m}{p}$ $(m = 0, \ldots, p$ die Sprünge $\lambda'_{p,m}$, $\lambda''_{p,m}$ machen und der Normierung (2) genügen; sie sin wegen (B) gleichmäßig beschränkt. Ihre Differenz $\chi_p(x) = \chi'_p(x) - \chi''_p(x$ ist eine Treppenfunktion, die an den Stellen $\frac{m}{p}$ die Sprünge $\lambda_{p,m}$ mach und folglich (9) erfüllt. Nach dem Hellyschen Auswahlsatz kann ma nun eine Folge natürlicher Zahlen q bestimmen derart, daß $\chi'_q(x)$, $\chi''_q(x$ nach monotonen Funktionen $\chi'(x)$, $\chi''(x)$ konvergieren, wobei $\chi_q(x)$ nac der Funktion beschränkter Schwankung $\chi(x) = \chi'(x) - \chi''(x)$ konver giert; aus

$$\int_0^1 f(x)\, d\chi'_q(x) \to \int_0^1 f(x)\, d\chi'(x)$$

usw. schließt man dann wie oben, daß $\chi(x)$ Lösung des Momentproblem ist und (10) besteht. Also:

II. *Die Zahlen μ_n sind dann und nur dann die Momente eine Belegungsfunktion $\chi(x)$ von beschränkter Schwankung, wenn die Be dingung* (B) *besteht.*

Beiläufig ergibt sich, daß eine reelle Zahlenfolge μ_n mit der Eigen schaft (B) Differenz von zwei total monotonen Zahlenfolgen ist[12]). Satz I gilt offenbar auch für komplexe Zahlenfolgen μ_n

Daß man $\chi(x)$ statt durch Treppenfunktionen auch durch die ander approximierenden Belegungsfunktionen des § 1 darstellen kann, bedar keiner Erwähnung.

---

[12]) A. a. O. [3]) habe ich erst dies bewiesen und daraus Satz II gefolgert.

§ 3.

$\chi(x)$ ein Integral.

Ist $\chi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx$ ein Integral (hier und weiterhin im Lebesgue-
hen Sinne), so nimmt das Momentproblem (1) die Gestalt

1) $$\int_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx = Mf$$

; diese Gleichung soll für jedes Polynom $f(x)$ gelten.

Zur Lösbarkeit durch eine integrable Funktion $\varphi(x)$ ist die Be-
ngung (B) des vorigen Paragraphen notwendig, aber nicht hinreichend.
dem wir diese Frage bis zum Schluß des gegenwärtigen Paragraphen
rückstellen, gehen wir sogleich zu der verschärften Forderung über, daß
$|\varphi(x)|^\alpha$ integrabel sein soll, wo α eine feste Zahl >1 ist; $\beta > 1$ sei die
it α durch

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \qquad \alpha + \beta = \alpha\beta$$

rknüpfte Zahl. Zur Abkürzung setzen wir

2) $$J_\alpha(\varphi) = \left[\int_0^1 |\varphi(x)|^\alpha\,dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$J_\alpha(\varphi)$ endlich oder ∞, je nachdem $|\varphi|^\alpha$ integrabel ist oder nicht). Es
i an die bekannten Ungleichungen

3) $$J_\alpha(\varphi + \psi) \leqq J_\alpha(\varphi) + J_\alpha(\psi) \qquad \text{(Minkowski)},$$

4) $$\int_0^1 |\varphi(x)\,\psi(x)|\,dx \leqq J_\alpha(\varphi)\,J_\beta(\psi) \qquad \text{(Hölder)}$$

innert; ein spezieller Fall der zweiten ist

5) $$\left[\int_0^1 \lambda(x)\,|\varphi(x)|\,dx\right]^\alpha \leqq \int_0^1 \lambda(x)\,|\varphi(x)|^\alpha\,dx$$

$$(\lambda(x) \geqq 0,\ \int_0^1 \lambda(x)\,dx = 1),$$

n man erhält, wenn man in (24) φ, ψ durch $\varphi\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$, $\lambda^{\frac{1}{\beta}}$ ersetzt. Die ana-
gen Ungleichungen gelten für Summen an Stelle der Integrale.

Soll nun (21) mit endlichem $J_\alpha(\varphi)$ gelten, so folgt nach (25) aus
$(p+1)\lambda_{p,m} = (p+1)\int_0^1 \lambda_{p,m}(x)\,\varphi(x)\,dx$, $(p+1)\int_0^1 \lambda_{p,m}(x)\,dx = 1$:

$$|(p+1)\lambda_{p,m}|^\alpha \leqq (p+1)\int_0^1 \lambda_{p,m}(x)\,|\varphi(x)|^\alpha\,dx,$$

$$(p+1)^{\alpha-1}\sum_{m=0}^{p}|\lambda_{p,m}|^{\alpha}\leqq\int_0^1|\varphi(x)|^{\alpha}dx.$$

also

$$(C)\qquad (p+1)^{\alpha-1}\sum_{m=0}^{p}|\lambda_{p,m}|^{\alpha}\text{ beschränkt }\leqq L^{\alpha}.$$

Diese Bedingung wird sich auch als hinreichend erweisen. Die linke Seite von (C) nimmt übrigens mit wachsendem p nicht ab. Denn die $\lambda_{p,m}$ genügen der leicht beweisbaren Rekursionsformel

$$(p+1)\lambda_{p,m}=(p+1-m)\lambda_{p+1,m}+(m+1)\lambda_{p+1,m+1};$$

schreibt man

$$\frac{p+1}{p+2}\lambda_{p,m}=\frac{p+1-m}{p+2}\lambda_{p+1,m}+\frac{m+1}{p+2}\lambda_{p+1,m+1},$$

so folgt nach der zu (25) analogen Summenformel

$$\left(\frac{p+1}{p+2}\right)^{\alpha}|\lambda_{p,m}|^{\alpha}\leqq\frac{p+1-m}{p+2}|\lambda_{p+1,m}|^{\alpha}+\frac{m+1}{p+2}|\lambda_{p+1,m+1}|^{\alpha}$$

und daraus durch Summation die Behauptung. (C) kann also durch die Forderung ersetzt werden, daß die linke Seite für $p\to\infty$ einen endlichen Grenzwert

$$L^{\alpha}\leqq\int_0|\varphi(x)|^{\alpha}dx$$

habe. Übrigens gilt dies auch für $\alpha=1$, d. h. die linke Seite von (B) nimmt mit wachsendem p nicht ab und hat, wenn sie beschränkt ist, einen endlichen Grenzwert.

Nehmen wir nun (C) in dieser Weise (d. h. mit der kleinstmöglichen Zahl L) als erfüllt an, so ist wegen

$$\sum_{m=0}^{p}|\lambda_{p,m}|\leqq\Big[\sum_{m=0}^{p}|\lambda_{p,m}|^{\alpha}\Big]^{\frac{1}{\alpha}}\Big[\sum_{m=0}^{p}1^{\beta}\Big]^{\frac{1}{\beta}}\leqq L$$

auch (B) erfüllt und die μ_n sind die Momente einer Belegungsfunktion $\chi(x)$, von der zu zeigen bleibt, daß sie das Integral einer in α-ter Potenz integrablen Dichtigkeitsfunktion $\varphi(x)$ ist. Hierzu entlehnen wir den Hilfssatz (F. Riesz, a. a. O. [4]), S. 462):

Für $\alpha>1$ ist $\chi(x)$ dann und nur dann das Integral einer Funktion $\varphi(x)$ mit integrablem $|\varphi(x)|^{\alpha}$, wenn das Hellingersche Integral $\int_0^1\frac{|d\chi(x)|^{\alpha}}{dx^{\alpha-1}}$, *d. i. die obere Grenze der Summen*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|\chi(x_i)-\chi(x_{i-1})|^{\alpha}}{(x_i-x_{i-1})^{\alpha-1}}\quad,(0=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=1$$

ür alle Intervallteilungen, endlich ist; dies Integral ist dann gleich $\int_0^1 |\varphi(x)|^\alpha dx$.

Sei nun $f(x)$ ein Polynom; nach der Hölderschen Summenformel ist

$$\left|\sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} f\left(\frac{m}{p}\right)\right| \leqq \left[\sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m}|^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[\sum_{m=0}^{p} \left|f\left(\frac{m}{p}\right)\right|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\leqq L\left[\frac{1}{p+1} \sum_{m=0}^{p} \left|f\left(\frac{m}{p}\right)\right|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

nd für $p \to \infty$ wegen (8)

26) $$|Mf| \leqq L\left[\int_0^1 |f(x)|^\beta dx\right]^{\frac{1}{\beta}} = L J_\beta(f).$$

Hiermit könnte übrigens unsere Aufgabe als erledigt gelten, da nach Herrn F. Riesz (a. a. O. [4]), § 8, S. 470) dies gerade die notwendige und inreichende Bedingung für Lösbarkeit des Gleichungssystems

$$\mu_k = \int_0^1 x^k \varphi(x) dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

urch ein in α-ter Potenz integrables $\varphi(x)$ ist. Um den Beweis mit nseren Mitteln kurz zu Ende zu führen, verwenden wir etwa die zweite ösung in § 1, d. h. die Darstellung von $\chi(x)$ durch die Formeln (10), 11), (12). Mit einer beliebigen Intervallteilung $(0 = x_0 < \ldots < x_n = 1)$ nd beliebigen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bilden wir das Polynom

27) $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x), \qquad f_i(x) = (p+1) \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda_{p,m}(x) dx$$

it dem Moment

$$Mf = \sum_{i=1}^{n} c_i [\chi_p(x_i) - \chi_p(x_{i-1})].$$

a nun $f_i(x) > 0$ und

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = (p+1) \sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m}(x) \int_0^1 \lambda_{p,m}(x) dx = 1,$$

$$\int_0^1 f_i(x) dx = \sum_{m=0}^{p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda_{p,m}(x) dx = x_i - x_{i-1},$$

o folgt nach der zu (25) analogen Summenformel

$$|f(x)|^\beta \leqq \sum_{i=1}^{n} |c_i|^\beta f_i(x)$$

und (26) liefert

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i[\chi_p(x_i)-\chi_p(x_{i-1})]\right|^\beta \leqq L^\beta \sum_{i=1}^{n} |c_i|^\beta (x_i - x_{i-1}),$$

also für $p \to \infty$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i[\chi(x_i)-\chi(x_{i-1})]\right|^\beta \leqq L^\beta \sum_{i=1}^{n} |c_i|^\beta (x_i - x_{i-1}). \tag{28}$$

Setzt man insbesondere

$$c_i = \left|\frac{\chi(x_i)-\chi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right|^{\alpha-1} \overline{sg}\,[\chi(x_i)-\chi(x_{i-1})],$$

so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\chi(x_i)-\chi(x_{i-1})|^\alpha}{(x_i-x_{i-1})^{\alpha-1}} \leqq L^\alpha$$

für jede Intervallteilung, das Hellingersche Integral des obigen Hilfssatzes ist endlich und demnach $\chi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx$ mit

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^\alpha dx \leqq L^\alpha,$$

welche Ungleichung zusammen mit der früher gefundenen in eine Gleichung übergeht. Also:

III. *Die Zahlen μ_n sind dann und nur dann die Momente einer in α-ter Potenz $(\alpha > 1)$ integrablen Dichtigkeitsfunktion $\varphi(x)$, wenn die Bedingung* (C) *besteht.*

Die linke Seite von (C) konvergiert dann für $p \to \infty$ zunehmend nach $\int_0^1 |\varphi(x)|^\alpha dx$.

Als Grenzfall $(\alpha \to \infty,\ \beta \to 1)$ können wir den Fall einer *beschränkten* Dichtigkeitsfunktion $\varphi(x)$ ansehen. Für $|\varphi(x)| \leqq L$ ergibt sich als notwendige Bedingung

$$|\lambda_{p,m}| \leqq L \int_0^1 \lambda_{p,m}(x)\,dx = \frac{L}{p+1},$$

(D)
$$(p+1)\,|\lambda_{p,m}| \text{ beschränkt} \leqq L.$$

Sie ist auch hinreichend. Denn ist sie erfüllt, so wird

$$\left|\sum_{m=0}^{p} \lambda_{p,m} f\left(\frac{m}{p}\right)\right| \leqq \frac{L}{p+1} \sum_{m=0}^{p} \left|f\left(\frac{m}{p}\right)\right|,$$

$$|Mf| \leqq L \int_0^1 |f(x)|\,dx = L\,J_1(f),$$

die Formel (26) für $\beta = 1$. Dieselben Schlüsse wie oben führen zu (28) für $\beta = 1$, speziell

$$|\chi(\eta) - \chi(\xi)| \leqq L|\eta - \xi|,$$

d. h. $\chi(x)$ hat beschränkte Differenzenquotienten und ist $= \int_0^x \varphi(x)\,dx$ mit $|\varphi(x)| \leqq L$ (man setze $\varphi(x) = \chi'(x)$, wo diese Ableitung existiert, sonst $= 0$). Also:

IV. *Die Zahlen μ_n sind dann und nur dann die Momente einer beschränkten Dichtigkeitsfunktion $\varphi(x)$, wenn die Bedingung* (D) *besteht.*

Noch einfacher schließt man bei reellen Momenten direkt aus (A):

$$a \leqq (p+1)\lambda_{p,m} \leqq b$$

ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\chi(x) - ax$ und $bx - \chi(x)$ monoton seien, d. h. die Differenzenquotienten von $\chi(x)$ zwischen a und b liegen, oder daß $\chi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx$ mit $a \leqq \varphi(x) \leqq b$.

Man kann diese Betrachtungen noch weiterführen, nämlich der Dichtigkeitsfunktior $\varphi(x)$ die Forderungen auferlegen, die bisher an die Belegungsfunktion gestellt wurden: $\varphi(x)$ monoton, von beschränkter Schwankung usw. Dazu braucht man nur die bisherigen Bedingungen in den (durch (3) definierten) Momenten μ_n^* der Dichtigkeitsfunktion $\chi(x)$ auszudrücken und dann $\chi(x)$ durch $\varphi(x)$, also die μ_n^* durch die μ_n zu ersetzen. Beispielsweise ergibt sich

(E) $$(p+1)\sum_{m=1}^{p} |\lambda_{p,m} - \lambda_{p,m-1}| \text{ beschränkt}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die μ_n die Momente einer *Dichtigkeitsfunktion $\varphi(x)$ von beschränkter Schwankung* seien.

Von größerem Interesse ist der entgegengesetzte Grenzfall ($\alpha \to 1$, $\beta \to \infty$) einer schlechthin (bloß in erster Potenz) integrablen Dichtigkeitsfunktion $\varphi(x)$. Die Bedingung (C) für $\alpha = 1$, nämlich (B), ist dafür nur notwendig, nicht hinreichend; sie sichert zwar die Lösbarkeit des Momentproblems durch eine Belegungsfunktion $\chi(x)$ von beschränkter Schwankung, aber nicht durch ein Integral.

Wir bemerkten, daß die linke Seite von (B), falls beschränkt, zunehmend nach einem Grenzwert L konvergiert. Dieser ist gleich der absoluten Variation $\int_0^1 |d\chi(x)|$ der Belegungsfunktion. In der Tat hat man[13])

[13]) $\int_0^1 f|d\chi|$ bedeutet das Stieltjesintegral $\int_0^1 f\,d\psi$ mit der monotonen Funktion $\psi(x) = \int_0^x |d\chi|$, und $\int_0^1 |d\chi|$ das obige Hellingerintegral für $\alpha = 1$

$$|\lambda_{p,m}| \leqq \int_0^1 \lambda_{p,m}(x)|d\chi(x)|, \qquad \sum_{m=0}^{p}|\lambda_{p,m}| \leqq \int_0^1 |d\chi(x)|,$$

$$L \leqq \int_0^1 |d\chi(x)|.$$

Andererseits ist wegen (B)

$$\Big|\sum_{m=0}^{p}\lambda_{p,m} f\Big(\frac{m}{p}\Big)\Big| \leqq L \max|f(x)|,$$

an Stelle von (26) tritt

$$|Mf| \leqq L \max|f(x)|,$$

und speziell für das Polynom (27), für das

$$|f(x)| \leqq \max|c_i|,$$

ergibt sich wie oben an Stelle von (28)

$$|\sum_{i=1}^{n} c_i[\chi(x_i) - \chi(x_{i-1})]| \leqq L \max|c_i|,$$

insbesondere

$$\sum_{i=1}^{n}|\chi(x_i) - \chi(x_{i-1})| \leqq L, \qquad \int_0^1 |d\chi(x)| \leqq L,$$

also

$$\int_0^1 |d\chi(x)| = L = \lim_{p\to\infty}\sum_{m=0}^{p}|\lambda_{p,m}|. \tag{29}$$

Dies vorausgeschickt, beweisen wir:

(α) Sind die Funktionen $\chi_p(x) = \int_0^x \varphi_p(x)dx$ Integrale $(p = 1, 2, \ldots)$, $\chi(x)$ von beschränkter Schwankung, und besteht

$$\int_0^1 |d\chi - d\chi_p| \to 0, \tag{30}$$

so ist auch $\chi(x)$ ein Integral.

Ist nämlich $\int_0^1 |d\chi - d\chi_p| < \varepsilon$, so erhält man für jede Intervallmenge $0 \leqq \xi_1 < \eta_1 \leqq \xi_2 < \eta_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n < \eta_n \leqq 1$

$$|\sum_{i=1}^{n}[\chi(\eta_i) - \chi(\xi_i)] - \sum_{i=1}^{n}[\chi_p(\eta_i) - \chi_p(\xi_i)]| < \varepsilon.$$

Die Variationen beider Funktionen in jeder endlichen oder abzählbaren Intervallmenge, also in jeder meßbaren Menge, unterscheiden sich um nicht mehr als ε; die Variation von $\chi(x)$ in jeder Nullmenge ist $< \varepsilon$, also Null, d. h. $\chi(x)$ ist total stetig und daher ein Integral.

(β) Ist $\chi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx$ ein Integral, so gilt für die approximierenden Belegungsfunktionen $\chi_p(x)$ der dritten (übrigens auch der zweiten) Lösung aus § 1 die Relation (30).

Wir haben die Formeln (19) und (20) anzuwenden; die letztere lautet

$$\varphi_p(x) = \int_0^1 \varphi_p(x, y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Wegen $\varphi_p(x, y) \geqq 0$ ist

$$|\varphi_p(x)| \leqq \int_0^1 \varphi_p(x, y)\,|\varphi(y)|\,dy,$$

$$\int_0^1 |\varphi_p(x)|\,dx \leqq \int_0^1 |\varphi(y)|\,dy \int_0^1 \varphi_p(x, y)\,dx = \int_0^1 |\varphi(x)|\,dx.$$

Nach Herrn Fejér (a. a. O. [10]) konvergieren für eine stetige Funktion $\psi(x)$ die Cesàroschen Mittel zweiter Ordnung der Partialsummen ihrer Legendrereihe gleichmäßig nach $\psi(x)$, d. h. gleichmäßig

$$\psi_p(x) = \int_0^1 \varphi_p(x, y)\,\psi(y)\,dy \to \psi(x)$$

und um so mehr

$$\int_0^1 |\psi - \psi_p|\,dx \to 0.$$

Wählt man zu der integrablen Funktion $\varphi(x)$ eine stetige $\psi(x)$ mit $\int_0^1 |\varphi - \psi|\,dx < \varepsilon$, so erhält man

$$\int_0^1 |\varphi - \varphi_p|\,dx \leqq \int_0^1 |\varphi - \psi|\,dx + \int_0^1 |\psi - \psi_p|\,dx + \int_0^1 |\psi_p - \varphi_p|\,dx$$

$$\leqq 2\int_0^1 |\varphi - \psi|\,dx + \int_0^1 |\psi - \psi_p|\,dx,$$

also für $p \to \infty$: $\overline{\lim} \int_0^1 |\varphi - \varphi_p|\,dx < 2\varepsilon$, d. h. $\int_0^1 |\varphi - \varphi_p|\,dx \to 0$ oder (30).

Demnach wird

$$\int_0^1 |d\chi - d\chi_q| \to 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\chi(x)$ ein Integral sei, wobei $\chi_q(x) = \int_0^x \varphi_q(x)\,dx$ und $\varphi_q(x)$ durch (20) erklärt ist. Wegen (29) können wir diese Bedingung so schreiben:

(B*) $\lim_q \lim_p \sum_{m=0}^{p} |\lambda_{p,m} - \lambda_{p,m,q}| = 0, \qquad \lambda_{p,m,q} = \int_0^1 \lambda_{p,m}(x)\,\varphi_q(x)\,dx,$

und den Satz aussprechen (da offenbar (B) eine Folge von (B*) ist):

II*. *Die Zahlen μ_n sind dann und nur dann die Momente eine integrablen Dichtigkeitsfunktion $\varphi(x)$, wenn die Bedingung* (B*) *besteht*

Hierzu vgl. Zusatz (α) am Schluß.

Das Fouriersche Momentproblem.

§ 4.

Ist t eine reelle Veränderliche, $\chi(t)$ im Intervall $0 \leqq t \leqq 2\pi$ von beschränkter Schwankung, so heißen die durch Stieltjesintegrale definierten Zahlen

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, d\chi(t) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

die trigonometrischen Momente oder Fourierkoeffizienten der *Belegungsfunktion* $\chi(t)$; ist $\chi(t) = \int_0^t \varphi(t)\, dt$, so heißen dieselben Zahlen

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, \varphi(t)\, dt$$

die Momente oder Koeffizienten der *Dichtigkeitsfunktion* $\varphi(t)$. Wir denken uns $\chi(t)$ über das Intervall $[0, 2\pi]$ hinaus durch

$$\chi(t + 2\pi) - \chi(t) = \chi(2\pi) - \chi(0)$$

fortgesetzt, entsprechend $\varphi(t)$ periodisch, so daß die Integrale $\int_0^{2\pi}$ durch $\int_\alpha^{\alpha+2\pi}$ ersetzt werden können und die Stellen $0, 2\pi$ keine besondere Rolle spielen. Wiederum sei die Normierung vorgeschrieben

$$\chi(0) = 0, \qquad \chi(t) = \frac{1}{2}\chi(t - 0) + \frac{1}{2}\chi(t + 0).$$

Jedem trigonometrischen Polynom

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikt}$$

ordnen wir bei vorgegebenen μ_k sein Moment

$$Mf = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \mu_{-k}$$

zu; das Momentproblem verlangt, die für jedes Polynom gültigen Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, d\chi(t) = Mf \tag{31}$$

urch eine Belegungsfunktion $\chi(t)$ zu erfüllen. Es gibt höchstens eine ösung, denn setzt man

$$\omega(t) = \int_0^t \chi(t)\,dt - ct, \qquad c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(t)\,dt,$$

o folgt durch partielle Integration, weil $\omega(0) = \omega(2\pi) = 0$,

$$2\pi\, Mf = f(0)[\chi(2\pi) - \chi(0)] - \int_0^{2\pi} f'(t)[\chi(t) - c]\,dt$$
$$= f(0)\cdot 2\pi\,\mu_0 + \int_0^{2\pi} f''(t)\,\omega(t)\,dt.$$

Es sind also bei vorgeschriebenen μ_k alle Fourierkonstanten bis auf $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(t)\,dt$) der periodischen stetigen Dichtigkeitsfunktion $\omega(t)$, owie $\omega(0) = 0$ bekannt, dadurch ist $\omega(t)$ eindeutig und $\chi(t) = \omega'(t) + c$ n jeder Stetigkeitsstelle von $\chi(t)$ bis auf die Konstante c bekannt; durch lie Normierung wird $\chi(t)$ sodann überall eindeutig bestimmt.

Zur Existenz einer monotonen Belegungsfunktion $\chi(t)$ ist notwendig, laß jedes Polynom $f(t) \geqq 0$ ein Moment $Mf \geqq 0$ habe. Das Analogon ur Stieltjesschen Lösung des gewöhnlichen Momentproblems nimmt ier folgende, als Toeplitzsches Kriterium für das Carathéodorysche Problem[14]) bekannte Form an: man hat, da sich jedes Polynom $\geqq 0$ in ler Gestalt $|f(t)|^2$ mit

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{ikt}$$

darstellen läßt, die Bedingung, daß die Hermiteschen Formen

$$M|f(t)|^2 = \sum_{h,k=0}^{n} \alpha_h \bar{\alpha}_k \mu_{k-h}$$

ler komplexen Variablen $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ nichtnegativ seien. Man gelangt so vieder zu approximierenden Treppenfunktionen $\chi_p(t)$, die einen mit p vachsenden Abschnitt der Momenttolge genau ergeben.

Wollen wir dies beiseite lassen und unsere Betrachtungsweise anwenden, so müssen wir uns zunächst, analog zu den $\lambda_{p,m}(x)$, ein einfaches System nichtnegativer (trigonometrischer) Polynome verschaffen, die jedes

[14]) Carathéodory, C.: Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. Palermo 32 (1911), S. 193–217; Toeplitz, O.: Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen, ib. S. 191–192; Fischer, E.: Über das Carathéodorysche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend, ib. S. 240–256. Vgl. Zusatz (β) am Schluß.

positive Polynom als lineare Verbindung (p-Form) mit positiven Koeffizienten darzustellen gestatten. (Vgl. Zusatz (γ) am Schluß.) Führen wir das nirgends negative Polynom

$$(32)\quad \lambda_p(t) = \left[\sin\frac{p+1}{2}t : (p+1)\sin\frac{1}{2}t\right]^2$$
$$= [p+1+2p\cos t + 2(p-1)\cos 2t + \ldots + 2\cos pt] : (p+1)^2$$
$$= \sum_{k=-p}^{p} \frac{p+1-|k|}{(p+1)^2} e^{ikt}$$

und die $2p+2$ äquidistanten Teilpunkte (t_0 willkürlich, von p abhängig)

$$t_m = \frac{m\pi}{p+1} + t_0$$

der Kreisperipherie ein, wo m ein volles Restsystem nach $2p+2$ durchläuft (zur Abkürzung unterdrücken wir in der Bezeichnung die Abhängigkeit der t_m von p), so behaupten wir:

Jedes Polynom vom Grade $\leqq p$ läßt sich in der Gestalt

$$(33)\quad f(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2p+1} a_m \lambda_p(t - t_m)$$

darstellen und zwar, wenn

$$(34)\quad \sum_{m=0}^{2p+1} (-1)^m a_m = 0$$

vorgeschrieben wird, nur auf eine Weise.

Man erhält nämlich, wenn man (33) mit

$$f(t) = \sum_{k=-p}^{p} \alpha_k e^{ikt}$$

vergleicht, die Bedingungen

$$\frac{2(p+1)^2}{p+1-|k|}\alpha_k = \sum_{m=0}^{2p+1} a_m e^{-ikt_m} \qquad (k = -p, \ldots, p),$$

dazu nach (34)

$$0 = \sum_{m=0}^{2p+1} a_m e^{-i(p+1)t_m},$$

ein System nichtverschwindender Determinante, mit der Auflösung

$$(35)\quad a_m = \sum_{k=-p}^{p} \frac{p+1}{p+1-|k|}\alpha_k e^{ikt_m} \qquad (m = 0, 1, \ldots, 2p+1).$$

Für $f(t) = 1$ erhält man

$$1 = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2p+1} \lambda_p(t - t_m),$$

überdies ist

$$0 = \sum_{m=0}^{2p+1} (-1)^m \lambda_p(t - t_m),$$

also einzeln

$$\sum_{m=0}^{p} \lambda_p(t - t_{2m}) = \sum_{m=0}^{p} \lambda_p(t - t_{2m+1}) = 1.$$

Ein festes Polynom

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikt}$$

läßt sich für jedes $p \geqq n$ in der Gestalt (33), (34), die seine *p-Form* heiße, darstellen; setzt man für den Augenblick

$$f_p(t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{p+1}{p+1-|k|} \alpha_k e^{ikt},$$

so sind $a_m = f_p(t_m)$ die Koeffizienten der p-Form. Da für $p \to \infty$ gleichmäßig $f_p(t) \to f(t)$, so wird für hinlänglich großes p und alle $m = 0, 1, \ldots, 2p+1$

$$|a_m - f(t_m)| < \varepsilon;$$

für jedes positive Polynom sind also, bei hinreichend großem p, sämtliche Koeffizienten der p-Form positiv[15]).

Die Momente

$$\lambda_{p,m} = M\lambda_p(t - t_m) = \sum_{k=-p}^{p} \frac{p+1-|k|}{(p+1)^2} \mu_k e^{ikt_m} \tag{36}$$

spielen nun hier genau dieselbe Rolle wie die gleichbenannten Größen des Stieltjesschen Momentproblems (nur ist hier $m = 0, 1, \ldots, 2p+1$). Sie drücken sich übrigens durch die *Fejérschen Mittel*

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-p}^{p} \frac{p+1-|k|}{p+1} \mu_k e^{ikt} \tag{37}$$

der Partialsummen der Fourierreihe

$$\mu_0 + (\mu_1 e^{it} + \mu_{-1} e^{-it}) + (\mu_2 e^{2it} + \mu_{-2} e^{-2it}) + \ldots \tag{38}$$

in einfachster Weise aus:

$$\lambda_{p,m} = \frac{\varphi_p(t_m)}{p+1}. \tag{39}$$

---

[15]) Für jede stetige periodische Funktion $f(t)$ konvergieren die Polynome $\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2p+1} f(t_m)\lambda_p(t - t_m)$ oder $\sum_{m=0}^{p} f(t_{2m})\lambda_p(t - t_{2m})$ gleichmäßig nach $f(t)$ (Interpolationsformel von D. Jackson). Analog konvergieren für jede in $0 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion $f(x)$ die S. Bernsteinschen Polynome $\sum_{m=0}^{p} f\left(\frac{m}{p}\right)\lambda_{p,m}(x)$ gleichmäßig nach $f(x)$.

Soll eine monotone Belegungsfunktion existieren, so erhalten wir die notwendige Bedingung

$$(A) \qquad (p+1)\lambda_{p,m} = \varphi_p(t_m) \geqq 0.$$

Auf Grund der Eigenschaften der p-Form schließen wir, wenn (A) erfüllt ist, daß das Moment

$$(40) \qquad Mf = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2p+1} a_m \lambda_{p,m}$$

jedes positiven, folglich auch jedes nichtnegativen Polynoms $\geqq 0$ ist und daß $\left(\text{unter Beachtung von } \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2p+1}\lambda_{p,m} = \mu_0\right)$ wieder

$$(41) \qquad \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2p+1} f(t_m)\lambda_{p,m} \to Mf.$$

Erste Lösung. Ist $\chi_p(t)$ die monotone Treppenfunktion[16]), die an den Stellen t_m die Sprünge $\pi\lambda_{p,m}$ macht $(m = 0, \ldots, 2p+1)$ und die übliche Normierung hat, so geht (41) über in

$$(42) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,d\chi_p(t) \to Mf$$

und man erhält wie in § 1 die (auch an den Sprungstellen gültige) Lösung

$$(43) \qquad \chi(t) = \lim \chi_p(t),$$

womit (A) als hinreichend erkannt ist.

Zweite Lösung. Diese ist das unmittelbare Analogon zur dritten Lösung des § 1; sie arbeitet mit der Fourierreihe wie jene mit der Legendrereihe. Auf Grund von (A) ist auch (τ reell)

$$M\lambda_p(t-\tau) = \sum_{k=-p}^{p} \frac{p+1-|k|}{(p+1)^2}\mu_k e^{ik\tau} = \frac{\varphi_p(\tau)}{p+1}$$

$\geqq 0$, also die Fejérschen Mittel $\varphi_p(t)$ durchweg $\geqq 0$ und die Funktionen

$$\chi_p(t) = \int_0^t \varphi_p(t)\,dt$$

monoton; für $p \geqq |k|$ ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,d\chi_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\varphi_p(t)\,dt = \frac{p+1-|k|}{p+1}\mu_k$$

---

[16]) Man könnte – vgl. Anm. [15]) – auch die Treppenfunktion wählen, die an den Stellen t_{2m} die Sprünge $2\pi\lambda_{p,2m}$ macht $(m = 0, 1, \ldots, p)$.

ınd konvergiert für $p \to \infty$ nach μ_k, so daß wieder (42) und (43) folgt. D. h. die aus der Fourierreihe (38) durch gliedweise Integration (von = 0 an) hervorgehende Reihe ist durch Mittel erster Ordnung summierbar ınd liefert als Summe die Belegungsfunktion $\chi(t)$ mit den vorgeschriebenen Momenten. In Wahrheit ist diese Reihe sogar konvergent mit der Summe $\chi(t)$; man erkennt dies, noch leichter als in § 1, indem man sie durch partielle Integration auf die Fourierreihe der (periodischen) Dichtigkeitsfunktion $\chi(t) - \mu_0 t$ zurückführt.

Da die Analogie zwischen dem Stieltjesschen und dem Fourierschen Momentproblem nun hinlänglich durchgeführt ist, so begnügen wir uns schließlich mit Zusammenstellung der hier wie dort fast gleichlautenden, notwendigen und hinreichenden Kriterien für die folgenden Eigenschaften der Belegungsfunktion $\chi(t)$ resp. der Dichtigkeitsfunktion $\varphi(t)$:

A) $\chi(t)$ monoton:

$$(p+1)\lambda_{p,m} = \varphi_p(t_m) \geqq 0$$

B) $\chi(t)$ von beschränkter Schwankung:

$$\sum_{m=0}^{2p+1} |\lambda_{p,m}| = \frac{1}{p+1} \sum_{m=0}^{2p+1} |\varphi_p(t_m)| \text{ beschränkt.}$$

B*) $\chi(t) = \int_0^t \varphi(t)\,dt$ ein Integral:

$$\lim_q \lim_p \sum_{m=0}^{2p+1} |\lambda_{p,m} - \lambda_{p,m,q}| = 0$$

mit

$$\lambda_{p,m,q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_p(t - t_m)\varphi_q(t)\,dt$$

oder einfacher

$$\lim_q \lim_p \frac{1}{p+1} \sum_{m=0}^{2p+1} \left| \varphi_p\left(\frac{m\pi}{p+1}\right) - \varphi_q\left(\frac{m\pi}{p+1}\right) \right| = 0.$$

C) $\varphi(t)$ in α-ter Potenz $(\alpha > 1)$ integrabel:

$$(p+1)^{\alpha-1} \sum_{m=0}^{2p+1} |\lambda_{p,m}|^\alpha = \frac{1}{p+1} \sum_{m=0}^{2p+1} |\varphi_p(t_m)|^\alpha \text{ beschränkt.}$$

D) $\varphi(t)$ beschränkt:

$$(p+1)\lambda_{p,m} = \varphi_p(t_m) \text{ beschränkt.}$$

E) $\varphi(t)$ von beschränkter Schwankung:

$$\frac{1}{p+1} \sum_{m=0}^{2p+1} |\varphi_p'(t_m)| \text{ beschränkt.}$$

Für $\alpha = 2$ liefert (C) wegen

$$\frac{1}{2p+2}\sum_{m=0}^{2p+1}|\varphi_p(t_m)|^2 = \sum_{k=-p}^{p}\left(\frac{p+1-|k|}{p+1}\right)^2|\mu_k|^2$$

unmittelbar den Riesz-Fischerschen Satz: für quadratisch-integrables $\varphi(t)$ ist die Konvergenz von $\sum_{-\infty}^{\infty}|\mu_k|^2$ notwendig und hinreichend.

(Eingegangen am 12. April 1922.)

Zusätze bei der Korrektur (5. Okt. 1922).

(α) Die in unseren Kriterien auftretenden Summen lassen sich auch durch Integrale ersetzen. Man erhält so, im Falle des Stieltjesschen Momentproblems, für

(B) χ von beschränkter Schwankung

(B*) φ integrabel

(C) $|\varphi|^\alpha$ integrabel

(E) φ von beschränkter Schwankung

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

(B) $\int_0^1 |\varphi_p|\,dx$ beschränkt

(B*) $\lim_{p,q\to\infty}\int_0^1|\varphi_p-\varphi_q|\,dx = 0$

(C) $\int_0^1|\varphi_p|^\alpha dx$ beschränkt

(E) $\int_0^1|\varphi_p'|\,dx$ beschränkt,

wo die φ_p die de la Vallée Poussinschen Summen (16) oder die Fejérschen Summenmittel zweiter Ordnung (20) der Legendrereihe bedeuten. Das (im Text etwas unübersichtliche) Kriterium (B*) gewinnt hier einen einfachen Sinn: es verlangt, daß im Raume der integrablen Funktionen mit der Entfernungsdefinition $\int_0^1|\varphi-\psi|\,dx$ die Polynome φ_p eine „Fundamentalfolge" bilden („stark" konvergieren, „im Mittel" konvergieren). Die Notwendigkeit dieser Bedingung geht aus der im Text bewiesenen

Relation $\int_0^1 |\varphi - \varphi_p| dx \to 0$ hervor. Um sie als hinreichend zu erkennen, zeigt man, daß $\chi_p = \int_0^x \varphi_p dx$ einen (im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßigen) Grenzwert χ hat, schließt aus der für jede Intervallteilung gültigen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |\chi_p(x_i) - \chi_p(x_{i-1}) - \chi_q(x_i) + \chi_q(x_{i-1})| \leqq \int_0^1 |\varphi_p - \varphi_q| dx$$

durch zweimaligen Grenzübergang auf $\int_0^1 |d\chi - d\chi_p| \to 0$, folgert daraus, daß $\chi = \int_0^x \varphi dx$ ein Integral mit $\int_0^1 |\varphi - \varphi_p| dx \to 0$ ist (d. h. daß jene Fundamentalfolge im Funktionenraum einen Limes hat) und daß für die Legendreschen Polynome

$$\int_0^1 L_m(x) \varphi(x) dx = \lim_p \int_0^1 L_m(x) \varphi_p(x) dx = \lambda_m,$$

also φ Dichtigkeitsfunktion mit den vorgeschriebenen Momenten ist. Den Beweis der übrigen Integralkriterien müssen wir übergehen.

Die genau entsprechenden Kriterien gelten für Fourierkonstanten, wobei die φ_p die Fejérschen Mittel erster Ordnung (37) (oder auch die unten in Zusatz (γ) angegebenen de la Vallée Poussinschen Mittel) bedeuten. Die Integralkriterien (B), (C) finden sich bereits bei W. H. Young: On the condition that a trigonometrical series should have a certain form, Proc. Lond. Roy. Soc. A 88 (1913), S. 569—574; W. H. Young and G. Chisholm Young: On a theorem of Riesz-Fischer, Quart. Journ. 44 (1913), S. 49—88; das Integralkriterium (B*) nach einer Mitteilung des Herrn Neder bei H. Steinhaus, Bulletin Krakau, Juli—Okt. 1916, S. 467—468.

(β) Ordnen wir jeder Folge komplexer Zahlen μ_k ($k = 0, \pm 1, \ldots$) die beiden Potenzreihen

$$f(z) = \mu_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k, \qquad g(z) = \mu_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} z^k$$

zu, so lassen sich unsere Kriterien für Fourierreihen unmittelbar auf Potenzreihen übertragen. Beschränken wir uns auf den (einer reellen Belegungsfunktion $\chi(t)$ entsprechenden) Fall, daß μ_k und μ_{-k} konjugiert komplex sind, insbesondere μ_0 reell. Sind

$$f_p(z) = \mu_0 + 2\sum_{k=1}^{p} \frac{p+1-k}{p+1} \mu_k z^k$$

die Summenmittel erster Ordnung der Potenzreihe $f(z)$,

$$\varphi_p(t) = \Re f_p(e^{it})$$

die Fejérschen Mittel der Fourierreihe, so ist

(A) $$\Re f_p(e^{it_m}) \geqq 0$$

notwendiges und hinreichendes Kriterium für ein im Einheitskreis reguläres $f(z)$ mit $\Re f(z) \geqq 0$. Der umkehrbar eindeutige Zusammenhang zwischen solchen $f(z)$ und monotonen Funktionen $\chi(t)$ wurde zuerst bemerkt von G. Herglotz: Über Potenzreihen mit positivem reellen Teil im Einheitskreis, Leipz. Ber. 63 (1911), S. 501—511. Vgl. E. Study: Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche (Leipzig und Berlin 1913), S. 107; C. Carathéodory: Über die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen, Berl. Akad. Ber. 30 (1920), S. 559—573, sowie Anm. [14]). Ferner ist

(B) $$\frac{1}{p+1} \sum_{m=0}^{2p+1} |\Re f_p(e^{it_m})| \text{ beschränkt}$$

Kriterium dafür, daß $f(z)$ im Einheitskreis regulär und Differenz von Funktionen mit positivem Realteil sei;

(D) $$\Re f_p(e^{it_m}) \text{ beschränkt}$$

Kriterium für ein im Einheitskreise reguläres $f(z)$ mit beschränktem Realteil,

$$f_p(e^{it_m}) \text{ beschränkt}$$

Kriterium für ein im Einheitskreise reguläres beschränktes $f(z)$ u. dgl.

(γ) Die ganze Untersuchung des § 4 läßt sich, statt mit den Polynomen $\lambda_p^{\cdot}(t)$ des Textes, auch mit den Polynomen

$$\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^{2p} : \binom{2p}{p} = \sum_{k=-p}^{p} \frac{p!^2}{(p-k)!\,(p+k)!}\, e^{ikt}$$

durchführen; man erhält dadurch eine neue Lösung (der zweiten in § 1 analog) und neue Kriterien, in denen statt der Fejérschen Mittel die de la Vallée Poussinschen Summen (vgl. [9])

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-p}^{p} \frac{p!^2}{(p-k)!\,(p+k)!}\, \mu_k\, e^{ikt}$$

auftreten.

Beiträge zur Theorie der Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen.

Von

Rudolf Weyrich in Breslau.

Herrn Adolf Kneser zum 60. Geburtstag in dankbarer Verehrung.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich im wesentlichen mit der Frage, für welche Flächengattungen die Differentialgleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung algebraische Integrale besitzt. Hinsichtlich der geodätischen Linien krummer Flächen war dasselbe Problem Gegenstand einer Reihe von Untersuchungen französischer Mathematiker, deren Ergebnisse, um einen Vergleich zu gestatten, im folgenden kurz zusammengestellt werden.

Als erster behandelte Massieu[1]) die Bewegung eines Massenpunktes auf einer krummen Fläche unter der Wirkung eines Potentials unter Zugrundelegung der von Bertrand in Liouvilles Journal im Jahre 1857 dargestellten Theorie. Bezüglich der geodätischen Linien gelangte er zu dem Ergebnis, daß die Differentialgleichung dieser Kurven auf den auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen ein in den Ableitungen homogenes Integral von erster Dimension, auf den Liouvilleschen Flächen ein solches von zweiter Dimension besitzt. Die Untersuchungen Massieus wurden von Bour[2]) fortgesetzt und auf ganze rationale Integrale von beliebiger Dimension ausgedehnt. Weitere Ergebnisse erzielte O. Bonnet, der in einer um 1873 an der Sorbonne gehaltenen Vorlesung gewisse Spiralflächen

[1]) Massieu, Sur les intégrales algébriques des problèmes de mécanique. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, Paris 1861.

[2]) Bour, Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre, Journal de l'Ecole Polytechnique, 1862, 39ᵉ cahier, p. 149.

bestimmte, für die die Differentialgleichung der geodätischen Linien ein in den Ableitungen gebrochen lineares Integral besitzt. An diese Arbeiten knüpft eine Reihe von Veröffentlichungen von Maurice Lévy an, die sich im 50. Bande der Comptes rendus des séances de l'académie des sciences de Paris (1877) verstreut finden, in denen er zeigt, daß wenigstens der Grad als die Anzahl der voneinander verschiedenen Faktoren, in die das Integral zerlegbar ist, für die einzelnen Flächengattungen charakteristisch ist. Eine in mancher Beziehung erweiterte Zusammenstellung aller dieser Ergebnisse findet sich im 3. Bande von Darboux' „Leçons sur la théorie générale des surfaces", Kap. II und IV. Indessen ist in keiner der erwähnten Arbeiten der Versuch gemacht, zu entscheiden, welche Höchstzahl von Faktoren ein Integral enthalten kann.

Demgegenüber gestattet das Problem der Kurven konstanter, von Null verschiedener geodätischer Krümmung in dieser Beziehung eine scharfe Abgrenzung. In Abschnitt V der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß ein homogenes Integral nicht mehr als zwei verschiedene Linearfaktoren enthalten kann. Die zugehörigen Flächen sind die Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Dieses Ergebnis unterscheidet sich in charakteristischer Weise von dem der Untersuchungen über die geodätischen Linien. Der Unterschied wird dadurch bedingt, daß diese Integrale in zwei selbständige Integrale zerfallen. Bezüglich der auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen dagegen ist eine vollständige Analogie vorhanden.

I.

Bekanntlich sind die Kurven konstanter geodätischer Krümmung einer Fläche die Lösungen des Problems, auf der Fläche die Kurve gegebener Länge zu finden, die ein größtmögliches Areal umspannt.

Um diese Aufgabe analytisch formulieren zu können, seien folgende Festsetzungen getroffen.

In der üblichen Bezeichnungsweise sei das Quadrat des Linienelements der Fläche

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

das Oberflächenelement

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Die Diskriminante $EG - F^2$ sei in dem betrachteten Gebiete stets von Null verschieden. Die Voraussetzung, daß sie positiv sei, ist für die kommenden Entwicklungen nicht erforderlich, möge aber, da es sich um reelle Flächen handeln soll, trotzdem gemacht werden.

Die gesuchte Kurve endige in zwei festen Punkten. Diese seien rerseits durch eine zweite, feste Kurve verbunden, die rektifizierbar und on mehrfachen Punkten frei ist und mit der gesuchten Kurve zusammen ie Berandung eines einfach zusammenhängenden, von Singularitäten freien lächenstückes $\mathfrak{F}$ bildet, das wir als das zu umspannende Areal definieren. as über dieses Flächenstück gebildete Oberflächenintegral läßt sich nach em Gauß-Greenschen Satz auf ein über seine Berandung erstrecktes inienintegral zurückführen. Es ist

$$\iint_{\mathfrak{F}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \int_{\mathfrak{G}} M\, du + N\, dv,$$

orausgesetzt, daß M und N im Innern von $\mathfrak{F}$ eindeutig, endlich und ifferenzierbar sind und die Bedingung erfüllen

$$\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} = \sqrt{EG - F^2}.$$

Die Integrationsrichtung auf der Berandung von $\mathfrak{F}$ ist so zu wählen, daß h bezug auf einen im Innern von $\mathfrak{F}$ gelegenen Punkt der Drehungssinn erselbe ist wie der, der die positive u-Richtung auf dem kürzesten Wege h die positive v-Richtung überführt.

Unter den gemachten Voraussetzungen hat auch das über die ganze Berandung von $\mathfrak{F}$ erstreckte Längenintegral einen fest gegebenen Wert, nd die Lösungen der Aufgabe sind die Extremalen des Variationsproblems

$$\delta \int M\, du + N\, dv + \lambda \sqrt{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2} = 0.$$

Die Willkür, die den Funktionen M und N anhaftet, verschwindet in den Eulerschen Differentialgleichungen der Extremalen. Dagegen ist die Transversalitätsbedingung und damit auch die auf ihr beruhende partielle Differentialgleichung (1) des Abschnitts III nicht unabhängig von ihr. Eine der Eulerschen Differentialgleichungen ergibt, nach λ aufgelöst, in der Christoffelschen Bezeichnungsweise:

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{ds^3}\Big[du\, d^2v - dv\, d^2u + du\left(\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\} du^2 + 2\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\} du\, dv + \left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\} dv^2\right) - dv\left(\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\} du^2 + 2\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\} du\, dv + \left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\} dv^2\right)\Big]$$

Die geodätische Krümmung[3]) der Extremalen ist demnach gleich $-\frac{1}{\lambda}$, d. h. konstant.

[3]) Vgl. L. Bianchi, Differentialgeometrie, S. 154.

II.

Die Differentialgleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung ist nicht allgemein durch Quadraturen integrierbar. Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist es, diejenigen Flächengattungen ausfindig zu machen, bei denen diese Integration gelingt. Als Grundlage dient die Theorie der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung, die in folgender Form zur Anwendung kommen soll.

Es liege ein Variationsproblem vor:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt = 0 .$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Funktion F sei in den Ableitungen x' und y' positiv homogen von erster Dimension, so daß nach Euler die Identität besteht:

$$F = x' \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial F}{\partial y'} .$$

Die Größen $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ sind in x' und y' homogen von der Dimension Null, d. h. sie hängen nur von dem Verhältnis $\frac{y'}{x'}$ ab. Setzt man

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x'} = p, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y'} = q,$$

so kann man aus diesen beiden Gleichungen dieses Verhältnis eliminieren und gelangt zu einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für U, die U explizit nicht enthält und mit $\Delta U = 1$ bezeichnet werden möge. Gelingt es, zwei Funktionen p und q von x und y zu finden, die die Gleichung $\Delta U = 1$ identisch befriedigen und die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ erfüllen, so ist

$$V = \int p\, dx + q\, dy$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Zu einer solchen Bestimmung von p und q reicht die Gleichnng $\Delta U = 1$ allein offenbar nicht aus. Wir suchen daher eine Hilfsfunktion $\varphi(x, y, p, q) = \text{konst.}$, die wir als ein Integral von $\Delta U = 1$ bezeichnen, von der Beschaffenheit, daß die beiden Gleichungen $\Delta U = 1$ und $\varphi = \text{konst.}$ p und q in der geforderten Weise definieren. Differenziert man $\Delta U = 1$ und $\varphi = \text{konst.}$ nach x und y, so erhält man im ganzen vier Gleichungen, aus denen sich unter der Voraussetzung, daß die Determinante $\frac{\partial(\Delta, \varphi)}{\partial(p, q)}$ von Null verschieden ist, $\frac{\partial p}{\partial y}$ und

$\frac{q}{r}$ berechnen lassen, und die Integrabilitätsbedingung geht über in die olgende:

$$[\Delta, \varphi] = \frac{\partial \Delta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial \Delta}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial \Delta}{\partial q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Diese Identität kann als partielle Differentialgleichung für φ aufgefaßt erden, wenn man x, y, p und q als unabhängige Variable ansieht. Da e homogen und linear ist, so ist ihre Integration identisch mit der des multanen Systems

$$\frac{dx}{\frac{\partial \Delta}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial \Delta}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}} = \frac{-dq}{\frac{\partial \Delta}{\partial y}}.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Charakteristiken der Differentialleichung $\Delta U = 1$. Bezeichnet man den gemeinsamen Wert dieser Brüche mit dt, so ist

$$\frac{dx}{dt} = x' = \frac{\partial \Delta}{\partial p}, \qquad \frac{dy}{dt} = y' = \frac{\partial \Delta}{\partial q},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Delta}{\partial y}.$$

Nun ist vermöge der Homogenität von F

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x' \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = x' \frac{\partial p}{\partial x} + y' \frac{\partial q}{\partial x}.$$

führt man in diese Identität die aus der Gleichung der Charakteristiken olgenden Werte von x' und y' ein, so wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Delta}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}.$$

ermöge $\Delta = 1$ ist $\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0$, und da Entsprechendes ir y gilt, so kann an Stelle der Gleichungen $x' = \frac{\partial \Delta}{\partial p}$, $y' = \frac{\partial \Delta}{\partial q}$ geschrieben erden:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial \Delta}{\partial y}.$$

iernach folgt aus den beiden Gleichungen $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \Delta}{\partial x}$, $\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \Delta}{\partial y}$, wenn an nun wieder $\frac{\partial F}{\partial x'}$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial y'}$ für p und q setzt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y},$$

h. die Charakteristiken der Differentialgleichung $\Delta U = 1$ sind mit den xtremalen des Variationsproblems identisch.

Um die Charakteristiken in endlicher Form bestimmen zu könne sind in diesem Falle, da zwei unabhängige Variable vorliegen, drei vo einander unabhängige Integrale des simultanen Systems erforderlich, a denen p und q zu eliminieren sind. Eins dieser Integrale ist die Dif rentialgleichung $\Delta U = 1$ selbst. Die beiden weiteren Integrale sind wi kürlichen Konstanten gleich, so daß in der Gleichung der Charakteristik zwei willkürliche Konstanten auftreten. Ist nur eins dieser Integra etwa $\varphi = c_1$, bekannt, so erfordert die Herstellung der Gleichung d Charakteristiken, wie Jacobi gezeigt hat, nur noch eine Quadratur Aus $\Delta U = 1$ und $\varphi = c_1$ lassen sich p und q als Funktionen von x, und c_1 darstellen, und

$$V = \int p\,dx + q\,dy$$

ist, wenn es mit diesen Werten gebildet wird, eine Lösung von $\Delta U =$ Die Gleichung der Charakteristiken ist dann $\frac{\partial V}{\partial c_1} = c_2$, wenn c_2 irgendei andere Konstante bedeutet.

Hiernach läßt sich die Frage, wann die Differentialgleichung der Kurv kürzesten Umrings sich integrieren lasse, auch so stellen.

Welche Fundamentalgrößen muß eine Fläche besitzen, damit d Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung dieser Kurven algebraisch Integrale besitzt?

III.

Aus dem Ansatz

$$\delta \int_{\mathfrak{S}} dt \{Mx' + Ny' + \lambda \sqrt{Ex'^2 + 2Fx'y' + Gy'^2}\} = 0$$

folgt

$$p = \frac{\partial U}{\partial x} = M + \lambda \frac{Ex' + Fy'}{\sqrt{Ex'^2 + 2Fx'y' + Gy'^2}},$$

$$q = \frac{\partial U}{\partial y} = N + \lambda \frac{Fx' + Gy'}{\sqrt{Ex'^2 + 2Fx'y' + Gy'^2}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß $EG - F^2 \neq 0$, läßt sich hieraus das Ve hältnis $\frac{y'}{x'}$ eliminieren. Man erhält als Jacobi-Hamiltonsche Differentia gleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung:

$$(1) \qquad \Delta U = \frac{1}{\lambda^2 (EG - F^2)} \{E(q-N)^2 - 2F(p-M)(q-N) + G(p-M)^2\} = 1.$$

[4]) C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. Ges. Werke, Supplementban Berlin 1884. Vorlesung 19 und 20.

Die Frage nach den algebraischen Integralen dieser Differentialleichung läßt sich nach einem Satze von Koenigs über die Differentialleichungen der Dynamik, der sich auf diesen Fall übertragen läßt, auf ine einfachere Form reduzieren[5]).

Existiert überhaupt ein algebraisches Integral, so läßt sich auf folgende Veise zeigen, daß, wenn es in p und q irrational ist, notwendig eine Reihe von in diesen Größen rationalen Integralen existiert, die dem ersten ntegral äquivalent ist.

Die Gleichung $\Delta U = 1$ ist in p und q ersichtlich rational. Sei Φ in Integral, das bezüglich einer der Größen, etwa p, irrational ist. Die lgebraische Gleichung, die Φ definiert, sei

$$A = \sum_{i}^{0,n} P_i \Phi^i = 0, \tag{2}$$

n der die P_i ganze Polynome in p sind, deren Koeffizienten in irgendiner Weise, also auch irrational, von q abhängen können. A sei irreduibel, d. h. nicht durch ein in Φ ganzes Polynom teilbar, dessen Koeffienten rational von p abhängen. Da Φ ein Integral der Gleichung $\Delta U = 1$ t, so ist

$$[\Delta, \Phi] = 0,$$

nd da $A = 0$ eine Identität, ferner auch

$$[\Delta, A] = [\Delta, \Phi]\frac{\partial A}{\partial \Phi} + \sum_{i}^{0,n} [\Delta, P_i]\, \Phi^i = 0,$$

. h.

$$\sum_{i}^{0,n} [\Delta, P_i]\, \Phi^i = 0. \tag{3}$$

Die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von Φ in Gleichung (3) ängen rational von p ab, da $\Delta U = 1$ in p rational ist.

Für jeden Wert von p müssen die Gleichungen (2) und (3) eine leiche Wurzel haben. Aus der Irreduktibilität von A folgt dann, daß e alle Wurzeln gemein haben, und da beide Gleichungen noch dazu in Φ vom gleichen Grade sind, so müssen ihre Koeffizienten proportional ein, d. h. es ist

$$\frac{[\Delta, P_n]}{P_n} = \ldots = \frac{[\Delta, P_i]}{P_i} = \ldots = \frac{[\Delta, P_0]}{P_0}$$

der, für jeden Wert von i und k zwischen 0 und n:

$$P_i[\Delta, P_k] - P_k[\Delta, P_i] = 0.$$

[5]) Koenigs, Sur les intégrales algébriques des problèmes de la Dynamique. omptes rendus des séances de l'académie des sciences, Paris 1886, Bd. 103, S. 460.

Nun ist

$$\left[\Delta, \frac{u}{v}\right] = \frac{1}{v^2}\{v[\Delta, u] - u[\Delta, v]\},$$

so daß sämtliche Funktionen $\frac{P_i}{P_k}$ der Bedingung genügen

$$\left[\Delta, \frac{P_i}{P_k}\right] = 0,$$

Integrale der vorgegebenen Differentialgleichung und obendrein in p rationa sind. Sollten sie noch in q irrational sein, so kann jetzt dieselbe Übe legung hinsichtlich q angestellt werden, so daß an die Stelle des irrationale algebraischen Integrals eine Reihe von in p und q rationalen Integralen trit

Führt man in der Differentialgleichung (1) an Stelle der Prinzipa funktion U die Größe $U_1 = \frac{1}{\lambda} U$ ein, oder, was dasselbe bedeutet, ve tauscht man in dem Variationsproblem die Rolle der beiden Integrale, s erhält man, wenn man noch $\lambda = \frac{1}{\mu}$ setzt, als Jacobi-Hamiltonsch Differentialgleichung des Problems

$$(1') \quad \Delta_1 U_1 = \frac{1}{EG - F^2}\{E(q_1 - \mu N)^2 - 2F(p_1 - \mu M)(q_1 - \mu N) + G(p_1 - \mu M)^2\} = 1.$$

Die Integrale der Gleichung (1) gehen in die der Gleichung (1′) übe wenn man in ihnen ebenfalls p durch $\frac{1}{\mu} p_1$, q durch $\frac{1}{\mu} q_1$ ersetzt. Gege über dieser Substitution bleiben die in p und q homogenen Integrale un nur diese invariant. Ist φ in p und q etwa homogen von der Dimension r so ist $\varphi(x, y, p, q) = \varphi(x, y, \frac{1}{\mu} p_1, \frac{1}{\mu} q_1) = \mu^{-n} \varphi(x, y, p_1, q_1)$ und dah $\varphi(x, y, p_1, q_1) =$ konst. eine unmittelbare Folge von $\varphi(x, y, p, q) =$ kons

Die Integrale $\varphi(x, y, p, q) =$ konst. sind von der isoperimetrische Konstanten λ unabhängig, denn diese tritt in der Differentialgleichung (1 nur multiplikativ und daher in der φ definierenden Differentialgleichun $[\Delta, \varphi] = 0$ überhaupt nicht auf. Infolgedessen sind auch die homogene Integrale $\varphi(x, y, p_1, q_1)$ von μ unabhängig. Ordnet man den Klamme ausdruck $[\Delta_1, \varphi(x, y, p_1, q_1)]$ nach Potenzen von μ, so müssen, dam dieser identisch verschwinde, sämtliche Koeffizienten der Potenzen von verschwinden. φ ist daher ein gemeinsames Integral der drei Differentia gleichungen

$$\frac{1}{EG - F^2}(Eq_1^2 - 2Fp_1q_1 + Gp_1^2) = \text{konst.},$$

$$\frac{1}{EG - F^2}[p_1(FN - GM) - q_1(EN - FM)] = \text{konst.}$$

$$\frac{1}{EG - F^2}(EN^2 - 2FMN + GM^2) = \text{konst.}$$

der umgekehrt, da die durch den Klammerausdruck vermittelte Beziehung reziprok ist, das Integral $\varphi =$ konst. muß, seinerseits als Differentialgleichung aufgefaßt, diese drei Gleichungen zu Integralen haben. Die erste dieser Gleichungen ist der Beltramische Differentialparameter erster Ordnung. Daraus ergibt sich das plausible Resultat, daß jedes homogene Integral φ der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung a fortiori Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien sein muß.

IV.

Nach der entwickelten Theorie ist der Gang der durchzuführenden Untersuchung wie folgt vorgezeichnet.

Mit vorgegebenen Integraltypen, die in p und q rational und homogen sind, ist der Klammerausdruck $[\Delta, \varphi]$ zu bilden. Da φ ein Integral sein soll, so muß dieser identisch verschwinden, d. h. in dem nach Potenzen von p und q geordneten Ausdruck müssen deren Koeffizienten sich sämtlich auf Null reduzieren. Auf diese Weise erhält man eine Reihe von Differentialbeziehungen zwischen den Fundamentalgrößen der Fläche, den mit ihnen im Zusammenhang stehenden Funktionen M und N und den Koeffizienten, mit denen die Potenzen von p und q in dem Integrale $\varphi =$ konst. behaftet sind.

Mit der bisher benutzten allgemeinen Form des Linienelements würde die Rechnung zu kompliziert werden. Es empfiehlt sich, als Koordinatensystem die Minimallinien der Fläche zugrunde zu legen, weil sich in diesen Parametern die konforme Abbildung der Fläche auf sich selbst am einfachsten durchführen läßt. Diese ist häufig erforderlich, um bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen auftretende willkürliche Funktionen zu beseitigen. Hinsichtlich der Bezeichnung sei allgemein festgesetzt, daß solche willkürliche Funktionen, sofern sie nur von einem einzigen Argument abhängen, durch den der Benennung ihres Arguments entsprechenden großen Buchstaben, wenn nötig mit einem Index, dargestellt werden sollen.

Das Quadrat des Linienelements habe also etwa die Gestalt

$$ds^2 = 2iH(x,y)dxdy.$$

dann ist $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \sqrt{EG - F^2} = H$, und die Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung (1) reduziert sich, wenn man die numerischen Konstanten in die isoperimetrische Konstante λ aufnimmt, auf

$$\Delta U = \frac{1}{\lambda^2 H}(p - M)(q - N) = 1. \qquad (4)$$

Die Bildung des Klammerausdrucks mit einer Funktion $z_i = a_i p + b_i q$ worin a_i und b_i Funktionen von x und y sind, ergibt, da infolge $\Delta =$ offenbar $[\Delta, z_i] = [\log \Delta, z_i]$ ist:

$$\begin{aligned}[\Delta, z_i] = &-\Big(\frac{1}{p-M}\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{q-N}\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \log H}{\partial x}\Big) a_i \\ &- \frac{1}{p-M}\Big(p\frac{\partial a_i}{\partial x} + q\frac{\partial b_i}{\partial x}\Big) \\ &- \Big(\frac{1}{p-M}\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{1}{q-N}\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial \log H}{\partial y}\Big) b_i \\ &- \frac{1}{q-N}\Big(p\frac{\partial a_i}{\partial y} + q\frac{\partial b_i}{\partial y}\Big).\end{aligned}$$

Für $MN \neq 0$ läßt sich der Ausdruck $(p-M)(q-N)[\Delta, z_i]$ in die Form bringen:

(I) $$\begin{aligned}&(p-M)(q-N)[\Delta, z_i] \\ &= -\Big\{p^2\frac{\partial a_i}{\partial y} + pq\Big(a_i\frac{\partial}{\partial x}\log a_i H + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log b_i H\Big) + q^2\frac{\partial b_i}{\partial x} \\ &\quad - p\Big(a_i N\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{N} + b_i N\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{N} + N\frac{\partial a_i}{\partial x} + M\frac{\partial a_i}{\partial y}\Big) \\ &\quad - q\Big(a_i M\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{M} + b_i M\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{M} + N\frac{\partial b_i}{\partial x} + M\frac{\partial b_i}{\partial y}\Big) \\ &\quad + MN\Big(a_i\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{MN} + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{MN}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Ist eine der beiden Größen M und N, etwa $M = 0$, so ist

(II) $$\begin{aligned}&p(q-N)[\Delta, z_i] \\ &= -\Big\{p^2\frac{\partial a_i}{\partial y} + pq\Big(a_i\frac{\partial}{\partial x}\log a_i H + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log b_i H\Big) + q^2\frac{\partial b_i}{\partial x} \\ &\quad - p\cdot N\Big(a_i\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{N} + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{N} + \frac{\partial a_i}{\partial x}\Big) \\ &\quad - q\cdot N\frac{\partial b_i}{\partial x}\Big\}\end{aligned}$$

Es möge nun die Differentialgleichung (4) ein Integral besitzen, das in p und q homogen und linear ist:

$$\varphi = ap + bq = \text{konst.}$$

Damit der mit diesem Integral gebildete Klammerausdruck I identisch verschwinde, müssen die Identitäten bestehen:

(5) $$\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

(6) $$a\frac{\partial}{\partial x}\log aH + b\frac{\partial}{\partial y}\log bH = 0,$$

(7) $$\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

8) $$aN\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{N}+bN\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{N}+N\frac{\partial a}{\partial x}+M\frac{\partial a}{\partial y}=0,$$

9) $$aM\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{M}+bM\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{M}+N\frac{\partial b}{\partial x}+M\frac{\partial b}{\partial y}=0,$$

10) $$a\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{MN}+b\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{MN}=0,$$

vobei $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=H.$

Aus den Differentialgleichungen (5) und (7) folgt unmittelbar, daß $= X$, $b = Y$. Führt man an Stelle von x und y vermöge der Gleichungen

$$x=f(x_1),\quad y=g(y_1)$$

ieue Variable ein, wodurch die Form des Linienelements nicht geändert ınd eine konforme Abbildung der Fläche auf sich selbst bewirkt wird, o geht φ über in

$$\varphi=X\frac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}+Y\frac{\partial U}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dy}.$$

ind X und Y nicht identisch Null, so ist, wenn $\frac{\partial U}{\partial x_1}=p_1$, $\frac{\partial U}{\partial y_1}=q_1$ und

$$x_1=\int\frac{dx}{X},\quad y_1=\int\frac{dy}{Y}$$

esetzt wird

$$\varphi=p_1+q_1,$$

n Falle, daß etwa $X\equiv 0$, $Y\not\equiv 0$, und die gleiche Substitution für y llein gemacht wird

$$\varphi=q_1.$$

Ian kann daher annehmen, daß die Variablen von vornherein so gewählt eien, daß entweder

$$a=1,\quad b=1$$

der

$$a=0,\quad b=1.$$

Im ersten Falle gehen die Gleichungen (6), (8), (9), (10) über in

$$\frac{\partial}{\partial x}\log H+\frac{\partial}{\partial y}\log H=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{N}+\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{N}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{M}+\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{M}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{MN}+\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{MN}=0.$$

us diesen Gleichungen folgt, daß H, M und N Funktionen von $x-y$ ein müssen, die bis auf den zwischen diesen Größen bestehenden Zu-

sammenhang $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = H$ vollkommen willkürlich sind. Die hierdurch definierten Flächen sind auf Rotationsflächen abwickelbar. Führt man in der für das Quadrat des Linienelements gefundenen Form

$$ds^2 = F(x-y)\,dx\,dy$$

isometrische Koordinaten u, v ein durch die Substitution

$$x = u + iv, \quad y = u - iv,$$

so wird

$$ds^2 = F(2iv)[du^2 + dv^2] = \varphi(v)[du^2 + dv^2],$$

welche Form für die auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen charakteristisch ist.

Im Falle $a = 0$, $b = 1$ liefert das System der Gleichungen (6), (8), (9), (10):

$$\frac{\partial}{\partial y}\log H = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{N} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{M} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{MN} = 0,$$

und sie sind sämtlich erfüllt, wenn H, M und N willkürliche Funktionen von x allein sind, wobei diese Willkür jedoch durch die vorausgesetzte Beziehung $\frac{\partial N}{\partial x} = H$ in gewisser Weise eingeschränkt wird. Die hierdurch charakterisierten Flächen sind auf die Ebene abwickelbar. Da

$$ds^2 = 2iH(x)\,dx\,dy,$$

so folgt durch die Substitution $x_1 = 2i\int H(x)\,dx$, $y_1 = y$

$$ds^2 = dx_1\,dy_1.$$

Dieser Fall ist in dem ersten als Spezialfall enthalten und kann daher von der folgenden Betrachtung ausgeschlossen werden.

Bei Einführung thermischer Parameter $u = \frac{1}{2}(x+y)$, $v = \frac{1}{2i}(x-y)$ nimmt das Integral φ die Gestalt an:

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial u} = p_1 = \text{konst.}$$

und die Differentialgleichung (1) geht über in

$$\Delta U = \frac{1}{\lambda^2 E}[(p_1 - M)^2 + (q_1 - N)^2] = 1,$$

wobei E, M und N nur von v abhängen und der Beziehung $\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} = E$ genügen. Es sei etwa

$$N = N(v), \quad M = -\psi(v), \quad E = \psi'(v).$$

Aus $p_1 = c_1$ folgt

$$q_1 = N + \sqrt{\lambda^2\psi'(v) - [c_1 + \psi(v)]^2}$$

so daß

$$V = c_1 u + \int dv\left\{N + \sqrt{\lambda^2\psi'(v) - [c_1 + \psi(v)]^2}\right\}$$

eine von der nicht additiven Konstanten c_1 abhängige Lösung der Differentialgleichung ist. Demnach ist die Gleichung der Kurven kürzesten Umrings $\frac{\partial V}{\partial c_1} = c_2$ oder

$$u - c_2 = \int \frac{[c_1 + \psi(v)]\, dv}{\sqrt{\lambda^2 \psi'(v) - [c_1 + \psi(v)]^2}}.$$

V.

Das allgemeinste Integral, das in p und q rational und homogen ist, kann nach Zerlegung in Linearfaktoren in eine Gestalt gebracht werden, wie sie von Maurice Lévy bei seinen Untersuchungen über die geodätischen Linien verwendet wurde[6]).

$$\varphi = \theta(x, y) \prod_i^{1,n} (p + b_i q)^{\alpha_i} = \text{konst.}$$

Insbesondere ist in dieser Form auch dasjenige Integral enthalten, das in p und q von zweiter Dimension und als Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien für die Liouvilleschen Flächen charakteristisch ist.

Setzt man an die Stelle der Bedingung $[\Delta, \varphi] = 0$ die folgende:

(11) $$(p - M)(q - N)[\log \Delta, \log \varphi]$$
$$= (p - M)(q - N)\left\{[\log \Delta, \log \theta] + \sum_i^{1,n} \frac{\alpha_i}{p + b_i q}[\log \Delta, p + b_i q]\right\} = 0,$$

so sieht man, daß nach Ausführung der Multiplikation mit $(p - M)(q - N)$ der vor dem Summenzeichen stehende Ausdruck in p und q von erster Dimension ist, während die Zähler der unter dem Summenzeichen stehenden Brüche p und q auch in zweiter Dimension enthalten. Soll die Identität (11) bestehen, so müssen die Klammerausdrücke $[\log \Delta, p + b_i q]$ durch $p + b_i q$ teilbar sein, so daß von vornherein die Koeffizienten b_i, die Größen H, M und N und die Exponenten α_i gewissen Bedingungen unterliegen. Ist $MN \neq 0$, so ist nach der Identität I, in der nach der Form des Integrals φ die $a_i = 1$ zu setzen sind:

(12) $$(p - M)(q - N)[\log \Delta, p + b_i q]$$
$$= -\left\{pq\left(\frac{\partial}{\partial x}\log H + b_i \frac{\partial}{\partial y}\log b_i H\right) + q^2 \frac{\partial b_i}{\partial x}\right.$$
$$- p\left(N \frac{\partial}{\partial x}\log \frac{H}{N} + b_i N \frac{\partial}{\partial y}\log \frac{H}{N}\right)$$
$$- q\left(M \frac{\partial}{\partial x}\log \frac{H}{M} + b_i M \frac{\partial}{\partial y}\log \frac{H}{M} + N \frac{\partial b_i}{\partial x} + M \frac{\partial b_i}{\partial y}\right)$$
$$\left. + MN\left(\frac{\partial}{\partial x}\log \frac{H}{MN} + b_i \frac{\partial}{\partial y}\log \frac{H}{MN}\right)\right\}.$$

Damit dieser Ausdruck durch $p + b_i q$ teilbar sei, muß das letzte von p und q freie Glied verschwinden.

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{H}{MN} + b_i \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{H}{MN} = 0.$$

Enthält das Integral φ nur einen einzigen Faktor $p + b_i q$ — dieser Fall ist bereits behandelt —, so läßt sich diese Gleichung durch einen Wert b_i befriedigen, ohne daß über den Zusammenhang zwischen H, M und N eine weitere, einschränkende Voraussetzung gemacht wird. Besteht dagegen φ aus zwei oder mehreren verschiedenen Faktoren $p + b_i q$, so muß die Gleichung für sämtliche b_i bestehen, und das ist offenbar nur möglich, wenn $\frac{H}{MN} = \text{konst.}$ ist.

Es sei etwa

$$H = c \cdot MN.$$

Dann läßt sich H aus (12) eliminieren:

$$\begin{aligned}(p - M)(q - N)[\Delta, p + b_i q] &= -\Big\{ pq \Big(\frac{\partial}{\partial x} \log MN + b_i \frac{\partial}{\partial y} \log b_i MN \Big) + q^2 \frac{\partial b_i}{\partial x} \\ &\quad - p \Big(N \frac{\partial}{\partial x} \log M + b_i N \frac{\partial}{\partial y} \log M \Big) \\ &\quad - q \Big(M \frac{\partial}{\partial x} \log N + b_i M \frac{\partial}{\partial y} \log N + N \frac{\partial b_i}{\partial x} + M \frac{\partial b_i}{\partial y} \Big) \Big\}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist durch $p + b_i q$ teilbar, wenn

$$(p - M)(q - N)[\Delta, p + b_i q] = (A_i q + B_i)(p + b_i q).$$

Von der Funktion θ gilt, da $A_i q + B_i$ die Ableitung p nicht enthält, daß sie nur von x abhängen kann. Die unbekannten Koeffizienten A_i und B_i müssen dabei den Gleichungen genügen:

$$(13) \qquad \begin{cases} A_i = -\Big(\frac{\partial}{\partial x} \log MN + b_i \frac{\partial}{\partial y} \log b_i MN \Big) \\ A_i b_i = -\frac{\partial b_i}{\partial x} \\ B_i = N \frac{\partial}{\partial x} \log M + b_i N \frac{\partial}{\partial y} \log M \\ B_i b_i = M \frac{\partial}{\partial x} \log N + b_i M \frac{\partial}{\partial y} \log N + N \frac{\partial b_i}{\partial x} + M \frac{\partial b_i}{\partial y}. \end{cases}$$

Eliminiert man hieraus A_i uud B_i, so erhält man als Bedingung für die Teilbarkeit:

---

[6]) Maurice Lévy, Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, Paris 1877, Bd. 85.

$$\frac{\partial}{x}\log MN + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log b_i MN = \frac{\partial}{\partial x}\log b_i$$

$$_iN\frac{\partial}{\partial x}\log M + b_i^2 N\frac{\partial}{\partial y}\log M = M\frac{\partial}{\partial x}\log N + b_i M\frac{\partial}{\partial y}\log N + N\frac{\partial b_i}{\partial x} + M\frac{\partial b_i}{\partial y},$$

oder in etwas anderer Anordnung, und indem man die erste Gleichung mit $b_i N$ multipliziert:

$$\frac{\partial}{\partial x}\log M + b_i^2 N\frac{\partial}{\partial y}\log M + b_i N\frac{\partial}{\partial x}\log N + b_i^2 N\frac{\partial}{\partial y}\log N + b_i N\frac{\partial b_i}{\partial y} - N\frac{\partial b_i}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log M + b_i^2 N\frac{\partial}{\partial y}\log M - M\frac{\partial}{\partial x}\log N - b_i M\frac{\partial}{\partial y}\log N - M\frac{\partial b_i}{\partial y} - N\frac{\partial b_i}{\partial x} = 0,$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt:

$$(M + b_i N)\left(\frac{\partial}{\partial x}\log N + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log N + \frac{\partial b_i}{\partial y}\right) = 0.$$

Der erste Faktor muß als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Denn setzt man in der ersten Gleichung $b_i = -\frac{M}{N}$, so folgt $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$, also $H = 0$. Es muß daher der zweite Faktor verschwinden. Dadurch vereinfacht sich die erste Gleichung noch weiter, und man erhält schließlich zur Bestimmung von M, N und b_i die drei Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\log N + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log N + \frac{\partial b_i}{\partial y} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log M + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log M - \frac{\partial \log b_i}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

$$H = c\cdot MN = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{16}$$

Die Gleichungen (14) und (15) können geschrieben werden

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(Nb_i) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Mb_i^{-1}) + \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Es müssen sich daher zwei Funktionen Φ und Ψ von x und y bestimmen lassen, so daß

$$M = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Mb_i^{-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$N = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad Nb_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$b_i = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}.$$

Diese letzte Gleichung zusammen mit (16) ergibt für Φ und Ψ die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial y}=0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0. \tag{18}$$

Gleichung (18) besagt, daß Ψ eine Funktion von Φ ist.

$$\Psi=F(\Phi).$$

Dadurch geht (17) über in

$$[1+F'(\Phi)]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+[cF'(\Phi)+F''(\Phi)]\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0$$

oder

$$\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}=-\frac{cF'(\Phi)+F''(\Phi)}{1+F'(\Phi)}.$$

Die Funktion Φ muß daher der Differentialgleichung dritter Ordnung genügen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}\right)=0$$

oder

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2}+\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Da diese Gleichung sich in der Form schreiben läßt

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\log\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\log\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=0,$$

so gilt für b_i die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\log b_i}{\partial x\,\partial y}=0,$$

deren allgemeines Integral die Form hat

$$b_i=\frac{Y_i}{X_i},$$

wobei X_i eine Funktion von x, Y_i eine Funktion von y allein ist. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die Gleichungen (14) und (15) integrieren. Sie lauten:

$$X_i\frac{\partial}{\partial x}\log N+Y_i\frac{\partial}{\partial y}\log N+Y_i'=0 \tag{14'}$$

$$X_i\frac{\partial}{\partial x}\log M+Y_i\frac{\partial}{\partial y}\log M+X_i'=0 \tag{15'}$$

und die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen sind:

(19) $$\frac{dx}{X_i} = \frac{dy}{Y_i} = \frac{d\log N}{-Y_i'}$$

(20) $$\frac{dx}{X_i} = \frac{dy}{Y_i} = \frac{d\log M}{-X_i'}.$$

Sind X_i und Y_i von Null verschieden, so besitzt (19) die voneinander unabhängigen Integrale

$$\int \frac{dx}{X_i} - \int \frac{dy}{Y_i} = \text{konst.},$$

$$\log N + \log Y_i = \text{konst.},$$

(20) die Integrale

$$\int \frac{dx}{X_i} - \int \frac{dy}{Y_i} = \text{konst.},$$

$$\log M + \log X_i = \text{konst.}$$

Die allgemeinen Integrale von (14′) und (15′) sind daher, wenn F_i und G_i willkürliche Funktionen bedeuten,

$$M = \frac{1}{X_i} F_i\left(\int \frac{dx}{X_i} - \int \frac{dy}{Y_i}\right),$$

$$N = \frac{1}{Y_i} G_i\left(\int \frac{dx}{X_i} - \int \frac{dy}{Y_i}\right).$$

Mit den für b_i ermittelten Werten nimmt das Integral φ die Gestalt an:

$$\varphi = \theta(x) \prod_i^{1,n} \left(p + \frac{Y_i}{X_i} q\right)^{\alpha_i} = \theta(x) \prod_i^{1,n} X_i^{-\alpha_i} \prod_i^{1,n} (X_i p + Y_i q)^{\alpha_i} = \text{konst.}$$

Führt man nun wieder eine Koordinatentransformation aus: $x = x(x_1)$, $y = y(y_1)$, so geht φ über in

$$\varphi = \theta(x) \prod_i^{1,n} X_i^{-\alpha_i} \prod_i^{1,n} \left(X_i \frac{dx_1}{dx} \cdot p_1 + Y_i \frac{dy_1}{dy} \cdot q_1\right)^{\alpha_i},$$

und dadurch, daß man

$$x_1 = \int \frac{dx}{X_1}, \qquad y_1 = \int \frac{dy}{Y_1}$$

setzt, läßt sich erreichen, daß die Koeffizienten des ersten Linearfaktors in φ gleich 1 werden. Man kann sich daher die Koordinaten von vornherein so gewählt denken, daß, wenn etwa noch $\alpha_1 = 1$ gesetzt wird, wodurch die Allgemeinheit nicht eingeschränkt, aber auf die Ganzzahligkeit der α_i verzichtet wird,

$$\varphi = \bar{\theta}(x)(p+q) \prod_i^{2,n} (X_i p + Y_i q)^{\alpha_i} = \text{konst.}$$

Dabei gehen M und N über in

$$M = F_1(x-y), \qquad N = G_1(x-y).$$

Dieses Ergebnis ermöglicht es zu entscheiden, wieviel Linearfaktoren ein solches Integral φ enthalten kann. Die Funktionen X_i und Y_i müssen gemäß den Gleichungen (14′) und (15′) den Bedingungen genügen:

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{F_1'(x-y)}{F_1(x-y)} = -\dfrac{X_i'}{X_i - Y_i}, \\ \dfrac{G_1'(x-y)}{G_1(x-y)} = -\dfrac{Y_i'}{X_i - Y_i}, \end{cases}$$

d. h. die Differentialgleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{X_i'}{X_i - Y_i} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{X_i'}{X_i - Y_i} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{Y_i'}{X_i - Y_i} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{Y_i'}{X_i - Y_i} = 0$$

oder

$$(22)\qquad \frac{X_i''}{X_i'} - \frac{X_i' - Y_i'}{X_i - Y_i} = 0,$$

$$(23)\qquad \frac{Y_i''}{Y_i'} - \frac{X_i' - Y_i'}{X_i - Y_i} = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{X_i''}{X_i'} = \frac{Y_i''}{Y_i'},$$

und die Gleichung kann, da die linke Seite nur von x, die rechte nur von y abhängt, nur dann bestehen, wenn beide Seiten konstant sind.

$$(24)\qquad \frac{X_i''}{X_i'} = \frac{Y_i''}{Y_i'} = k.$$

Für $k = 0$ ergibt sich

$$X_i = h(x + c_1), \qquad Y_i = h(y + c_2)$$

mit derselben Konstanten h mit Rücksicht auf die Gleichungen (21). Die Integration dieser Gleichungen ergibt, wenn g_1 und g_2 zwei Integrationskonstanten sind:

$$F_1(x-y) = M = \frac{-g_1}{(x-y)+(c_1-c_2)}, \qquad G_1(x-y) = N = \frac{-g_2}{(x-y)+(c_1-c_2)},$$

$$H = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{g_1+g_2}{[(x-y)+(c_1-c_2)]^2} = c \cdot MN = \frac{c\cdot g_1 g_2}{[(x-y)+(c_1-c_2)]^2},$$

$$c = \frac{g_1+g_2}{g_1 g_2}.$$

Schließlich können die Integrationskonstanten c_1 und c_2 als unwesentlich fortgelassen werden. Denn eine Substitution

$$x' = x + c_1, \qquad y' = y + c_2$$

ändert nichts an den vorstehenden Entwicklungen, und die zu bestimmenden Größen gewinnen die Gestalt

$$H = \frac{g_1 + g_2}{(x-y)^2}, \qquad M = \frac{-g_1}{x-y}, \qquad N = \frac{-g_2}{x-y}$$

$$\varphi = \bar{\theta}(x)\,(p+q)(xp+yq)^{\alpha} = \text{konst.}$$

Im Falle $k \neq 0$ besitzen die Gleichungen (24) die allgemeinen Integrale

$$X_i = c_1 \cdot e^{kx} + c_3, \qquad Y_i = c_2 \cdot e^{ky} + c_4,$$

worin mit Rücksicht auf (22) und (23) $c_3 = c_4$ zu setzen ist. Es wird demgemäß, wenn man für den Augenblick $x - y$ mit z bezeichnet, nach (21)

$$\frac{F_1'(z)}{F_1(z)} = -\frac{c_1 \cdot k \cdot e^{kx}}{c_1 e^{kx} - c_2 \cdot e^{ky}} = -\frac{c_1 k e^{kz}}{c_1 e^{kz} - c_2},$$

$$\frac{G_1'(z)}{G_1(z)} = -\frac{c_2 k e^{ky}}{c_1 e^{kx} - c_2 e^{ky}} = -\frac{c_2 k e^{-kz}}{c_1 - c_2 e^{-kz}}$$

und die Integration ergibt, wenn g_1 und g_2 wieder zwei Integrationskonstanten bedeuten,

$$F_1(z) = \frac{g_1}{c_1 e^{kz} - c_2}, \qquad G_1(z) = \frac{g_2}{c_1 - c_2 \cdot e^{-kz}},$$

$$M = \frac{g_1 e^{ky}}{c_1 \cdot e^{kx} - c_2 e^{ky}}, \qquad N = \frac{g_2 e^{kx}}{c_1 e^{kx} - c_2 e^{ky}},$$

$$H = cMN = \frac{c g_1 g_2 e^{k(x+y)}}{[c_1 e^{kx} - c_2 e^{ky}]^2}.$$

Setzt man in dem Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = \frac{2ic g_1 g_2 e^{kx} e^{ky} dx\,dy}{[c_1 e^{kx} - c_2 e^{ky}]^2},$$

$$c_1 e^{kx} = u, \qquad c_2 \cdot e^{ky} = v, \qquad \frac{2ic g_1 g_2}{c_1 c_2 k^2} = C,$$

so wird

$$ds^2 = \frac{C\,du\,dv}{(u-v)^2},$$

womit der Fall $k \neq 0$ auf den vorigen zurückgeführt ist.

Zur Bestimmung von $\theta(x)$ und α bilden wir nunmehr die Identität (11), die sich in folgender Weise vereinfacht

$$-(q-N)\frac{\partial \log \theta}{\partial x} + \sum_i^{1,2} \alpha_i (A_i q + B_i) = 0.$$

Hierin ist, da $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{y}{x}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha$ zu setzen sind, nach den den Gleichungen (13):

$$A_1 = B_1 = 0, \qquad A_2 = \frac{1}{x}, \qquad B_2 = -\frac{N}{x},$$

folglich

$$(q-N)\left(\frac{d\log\theta}{dx}-\frac{\alpha}{x}\right)=0,$$

also

$$\theta=\text{konst.}\,x^{\alpha}.$$

Das gesuchte Integral lautet daher

$$\varphi=(p+q)(xp+yq)^{\alpha}=\text{konst}$$

Der Exponent α bleibt unbestimmt.

Die Form dieses Integrals ändert sich, sobald in den Gleichungen $b_i=\frac{Y_i}{X_i}$ eine der willkürlichen Funktionen, etwa Y_1, gleich Null ist. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die x-Koordinate wieder so wählen, daß φ die Gestalt erhält:

$$\varphi=\bar{\theta}(x)\,p\prod_{i}^{2,n}(X_ip+Y_iq)^{\alpha_i}=\text{konst.},$$

daß also $X_1=1$ wird. Dann ergeben die Gleichungen (14′) und (15′), daß M und N Funktionen von y allein sein müssen

$$M=F(y),\qquad N=G(y).$$

Vermöge der Gleichung

$$H=cMN=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

ist auch H eine Funktion von y allein:

$$H=c\cdot F(y)\cdot G(y)$$

und eine nunmehr in y durchgeführte Koordinatentransformation gestattet es, durch die Substitution

$$\int c\cdot F(y)\cdot G(y)\,dy=y_1$$

das Quadrat des Linienelements in die Form zu bringen:

$$ds^2=2i\,dx\,dy_1.$$

Nehmen wir die Koordinaten wieder von vornherein so gewählt an, so ist also

$$H=1,\qquad M=-y,\qquad N=-\frac{1}{cy}$$

zu setzen und die Differentialgleichungen (14′) und (15′) gehen über in

$$-Y_i\cdot\frac{1}{y}+Y_i'=0,$$

$$Y_i\cdot\frac{1}{y}+X_i'=0.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert neben der bereits bekannten Lösung $Y_1 = 0$ die weitere $Y_2 = c \cdot y$ und darauf die zweite, wenn man von einer unerheblichen additiven Konstanten absieht: $X_1 = 1$, $X_2 = -c \cdot x$. Das Integral φ hat daher die Gestalt

$$\varphi = \bar{\theta}(x)\, p (xp - yq)^{\alpha} = \text{konst.}$$

Zur Bestimmung von $\theta(x)$ ist in dem Gleichungssystem (13) $b_1 = 0$, $b_2 = -\frac{y}{x}$ zu setzen. Dann wird

$$A_1 = B_1 = 0,$$

$$A_2 = \frac{1}{x}, \quad B_2 = -\frac{N}{x}$$

und die Gleichung

$$-(q - N)\frac{\partial \log \theta}{\partial x} + \sum_{i}^{1,2} \alpha_i (A_i q + B_i) = 0$$

geht für $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha$ wieder über in

$$(q - N)\left(\frac{d \log \theta}{dx} - \frac{\alpha}{x}\right) = 0$$

mit der Lösung

$$\theta(x) = \text{konst.}\, x^{\alpha}.$$

Das zugehörige Integral ist daher

$$\varphi = p (xp - yq)^{\alpha} = \text{konst.}$$

für beliebiges α.

Die Annahme $H = c \cdot MN$, die erforderlich war, um die Identität (11) unter Zugrundelegung der Identität I bei mehreren Linearfaktoren zu erfüllen, wirkte von vornherein einschränkend auf die Größe H. Eine solche Annahme ist nicht nötig, wenn man unter Zugrundelegung der Identität II eine der Größen M und N, etwa M, gleich Null setzt, und es ist daher noch zu untersuchen, ob diese Annahme zu anderen Ergebnissen führt.

Die Identität II geht für $a_i = 1$ über in

$$p(q - N)[\log \Delta, p + b_i q] = pq\left(\frac{\partial}{\partial x} \log H + b_i \frac{\partial}{\partial y} \log b_i H\right) + q^2 \frac{\partial b_i}{\partial x}$$
$$- pN\left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{H}{N} + b_i \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{H}{N}\right) - qN \frac{\partial b_i}{\partial x}$$

und es muß, wenn die rechte Seite durch $p + b_i q$ teilbar sein soll,

$$-p(q - N)[\log \Delta, p + b_i q] = (p + b_i q)(A_i q + B_i)$$

sein. Ein Vergleich liefert die Gleichungen

$$A_i = \frac{\partial}{\partial x} \log H + b_i \frac{\partial}{\partial y} \log b_i H = \frac{\partial}{\partial x} \log b_i,$$

$$B_i = -N\left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{H}{N} + b_i \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{H}{N}\right) = -N \frac{\partial}{\partial x} \log b_i.$$

Elimination von A_i und B_i liefert als Bedingungen für die Teilbarkeit die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\log H + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log b_i H = \frac{\partial}{\partial x}\log b_i, \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{H}{N} + b_i\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{H}{N} = \frac{\partial}{\partial x}\log b_i. \tag{26}$$

Die Funktion θ ist wie im vorigen Falle nur von x abhängig. Durch Subtraktion der Gleichungen (25) und (26) folgt:

$$\frac{\partial \log N}{\partial x} + b_i\frac{\partial \log N}{\partial y} = -\frac{\partial b_i}{\partial y}, \tag{27}$$

während (26), wenn man darin vermöge der Gleichung $H = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\frac{H}{N} = \frac{\partial \log N}{\partial x}$ setzt, übergeht in

$$\frac{\partial^2 \log N}{\partial x^2} + b_i\frac{\partial^2 \log N}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial \log N}{\partial x}\cdot\frac{\partial \log b_i}{\partial x}. \tag{28}$$

Gleichung (27) gibt, nach x differenziert:

$$\frac{\partial^2 \log N}{\partial x^2} + b_i\frac{\partial^2 \log N}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 b_i}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \log N}{\partial y}\cdot\frac{\partial b_i}{\partial x}$$

und diese Gleichung von (28) subtrahiert

$$\frac{\partial^2 b_i}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{b_i}\frac{\partial b_i}{\partial x}\left(\frac{\partial \log N}{\partial x} + b_i\frac{\partial \log N}{\partial y}\right) = 0.$$

Indem man für die Klammer den aus (27) folgenden Wert setzt, folgt für b_i die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 b_i}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{b_i}\frac{\partial b_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial b_i}{\partial y} = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 \log b_i}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Demnach ist wieder b_i gleich dem Produkt einer willkürlichen Funktion von x und einer solchen von y allein:

$$b_i = \frac{Y_i}{X_i}.$$

Die Schlußweise ist nun die gleiche wie im Falle $MN \neq 0$. Durch eine geeignete Koordinatentransformation läßt sich, falls die X_i und Y_i von Null verschieden sind, bewirken, daß $X_1 = Y_1 = 1$ wird. Dann muß infolge (27) N eine Funktion von $x - y$ sein. Soll das Integral φ mehr als einen Linearfaktor enthalten, so müssen die übrigen X_i und Y_i gemäß den Gleichungen (27) und (28) für $N = F(x-y)$ die Bedingung erfüllen:

$$\frac{F'(x-y)}{F(x-y)} = -\frac{Y_i'}{X_i - Y_i},$$

$$\frac{F''(x-y)}{F'(x-y)} - \frac{F'(x-y)}{F(x-y)} = -\frac{X_i'}{X_i - Y_i}.$$

Für die X_i und Y_i erhält man genau wieder die Differentialgleichungen (22) und (23) mit den Lösungen $X_2 = x$, $Y_2 = y$, und die bis dahin willkürliche Funktion $F(x-y)$ wird näher bestimmt zu

$$F(x-y) = N = \frac{-k}{x-y}, \quad H = \frac{k}{(x-y)^2},$$

worin k eine Konstante ist. Ganz entsprechend erledigt sich auch für $M = 0$ die Annahme $Y_1 = 0$, so daß die Ergebnisse dieselben sind wie für $MN \neq 0$.

Die erhaltenen Flächen sind, da H eine Funktion von $x-y$ ist, auf Rotationsflächen abwickelbar, indessen dadurch ausgezeichnet, daß sie konstantes Krümmungsmaß besitzen. In der hier gewählten Bezeichnungsweise hat dieses den Wert[7])

$$-\frac{1}{\sqrt{H}} \cdot \frac{\partial^2 \log H}{\partial x \partial y} = \frac{2}{k}.$$

Die Annahme $Y_1 = 0$ führte auf Flächen, die auf die Ebene abwickelbar sind.

Die Unbestimmtheit des Exponenten α ist darauf zurückzuführen, daß die aus zwei Linearfaktoren bestehenden Integrale φ in zwei selbständige Integrale zerfallen. Da die zugehörigen Flächen auf Rotationsflächen bzw. auf die Ebene abwickelbar sind, so besitzt die Differentialgleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung das Integral $p+q = \text{konst.}$ bzw. $p = \text{konst.}$ Ferner besitzt die Differentialgleichung für die Flächen konstanten, von Null verschiedenen Krümmungsmaßes, außerdem das Integral $xp + yq = \text{konst.}$ bzw. für die auf die Ebene abwickelbaren Flächen $xp - yq = \text{konst.}$ Jede beliebige Funktion dieser beiden Integrale, also auch die Funktionen

$$(p+q)(xp+yq)^\alpha = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad p(xp-yq)^\alpha = \text{konst.}$$

sind Integrale der Differentialgleichung.

Demnach läßt sich das Ergebnis der Untersuchung wie folgt zusammenfassen:

Besitzt die Differentialgleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung einer Fläche nur ein in den Ableitungen homogenes rationales Integral, so ist die Fläche auf eine Rotationsfläche mit veränderlichem Krümmungsmaß abwickelbar. Besitzt die Differentialgleichung zwei verschiedene solcher Integrale, so hat die Fläche konstantes Krümmungsmaß. Sämtliche Integrale sind in den Ableitungen linear. Für alle andern Flächengattungen besitzt die Differentialgleichung kein algebraisches Integral.

---

[7]) Vgl. Darboux, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces Paris 1889, I, S. 375.

Man erhält hier dieselbe Klassifikation von Flächen, auf die Weingarten[8]) und v. Mangoldt[9]) bei ihren im Anschluß an eine Arbeit von Christoffel[10]) durchgeführten Untersuchungen über die Verschiebbarkeit der geodätischen Dreiecke auf krummen Flächen geführt wurden. Der Grund dafür ist, daß die Frage nach den Integralen einer Differentialgleichung in engem Zusammenhang steht mit der Frage nach den Transformationsgruppen, die die Gleichung invariant lassen. Eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung ist mit dem von ihr umschlossenen Flächenstück auf einer Fläche konstanten Krümmungsmaßes in jeder beliebigen Richtung ohne Änderung ihrer geodätischen Krümmung verschiebbar, auf den Rotationsflächen und den durch Verbiegung aus ihnen entstehendem Flächen nur längs der Parallelkreise bzw. den bei der Verbiegung aus ihnen entstehenden Kurven.

Schreibt man die Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes in der Form

$$p\left(q+\frac{k}{x-y}\right)=\lambda^2\frac{k}{(x-y)^2},$$

so kann man aus dieser Gleichung und den beiden Integralen

$$p+q=c_1, \quad xp+yq=c_2$$

p und q eliminieren und erhält als Gleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung

$$(c_2-c_1y)(c_1x-c_2+k)=\lambda^2k$$

oder bei Einführung isometrischer Koordinaten

$$x=u+iv, \quad y=u-iv$$

und unter Einführung neuer Konstanten:

$$(u-a)^2+(v-b)^2=r^2.$$

Daraus folgt das bekannte Ergebnis, daß sich die Flächen konstanten Krümmungsmaßes konform so auf die Ebene abbilden lassen, daß die Kurven konstanter geodätischer Krümmung der Fläche in die Kreise der Ebene übergehen.

---

[8]) J. Weingarten, Über die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen. Sitzungsber. der Kgl. preuß. Akad. d. Wiss. Berlin, 1882, S. 453.

[9]) H. v. Mangoldt, Über die Klassifikation der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke. Crelles Journal 94 (1882), S. 21.

[10]) E.-B. Christoffel, Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Abhandlungen der Kgl. Akad. d. Wiss. Berlin, 1868, S. 119–176.

(Eingegangen am 4. April 1922.)

Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes.

Zweiter Teil.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Die Aufgabe. — Ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Wie der erste Teil[1]) ist auch dieser zweite der Differentialgleichung

A) $$[kx + ly + f(x, y)]\,dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\,dx$$

gewidmet, wobei $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x, y sind, die noch gewissen Bedingungen genügen müssen, während k, l, m, n reelle Konstanten sind, für die

1) $$kn - lm \neq 0$$

ist. Von den fünf im ersten Teil unterschiedenen Fällen sind dort die folgenden beiden behandelt worden:

I. $(k-n)^2 + 4lm > 0, \qquad kn - lm > 0,$

II. $(k-n)^2 + 4lm = 0.$

Es bleiben noch die drei Fälle

III. $(k-n)^2 + 4lm > 0, \qquad kn - lm < 0,$

IV. $(k-n)^2 + 4lm < 0, \qquad k + n \neq 0,$

V. $(k-n)^2 + 4lm < 0, \qquad k + n = 0,$

die den Gegenstand dieses zweiten Teiles bilden sollen.

Zunächst mag jedoch ein ganz allgemein auf die fünf Fälle sich beziehender Satz vorausgeschickt werden.

---

[1]) Mathematische Zeitschrift **15** (1922), S. 121—146.

Satz 1. *Wenn die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes (diesen mitgerechnet) stetig sind und den Bedingungen genügen:*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x,y)}{|x|+|y|} = 0,$$

wenn ferner die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_1,y)-f(x_2,y)}{x_1-x_2}, \qquad \frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2},$$
$$\frac{\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)}{x_1-x_2}, \qquad \frac{\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)}{y_1-y_2}$$

beschränkt sind, so geht durch jeden in genügender Nähe des Nullpunkts gelegenen, aber vom Nullpunkt verschiedenen Punkt x_0, y_0 genau eine Integralkurve der Differentialgleichung (A).

Beweis. Nach unseren Voraussetzungen ist jedenfalls

$$|f(x_0, y_0)| < \varepsilon(|x_0| + |y_0|),$$
$$|\varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon(|x_0| + |y_0|),$$

wo ε beliebig klein sein darf, wenn nur $|x_0|$, $|y_0|$ klein genug sind. Daraus folgt aber, daß die Funktionen

$$kx + ly + f(x, y),$$
$$mx + nx + \varphi(x, y)$$

an der Stelle x_0, y_0 nicht beide zugleich verschwinden können (den sehr einfachen Beweis dafür findet man auf Seite 124 des ersten Teils). Von den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx+ny+\varphi(x,y)}{kx+ly+f(x,y)} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{kx+ly+f(x,y)}{mx+ny+\varphi(x,y)}$$

hat also mindestens eine die Eigenschaft, daß ihre rechte Seite in der Umgebung von x_0, y_0 stetig ist. Diese rechte Seite hat aber außerdem beschränkte Differenzenquotienten, da wir solches von $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ vorausgesetzt haben. Daher ist die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, und somit Satz 1 bewiesen.

§ 2.

Ein Spezialfall von Fall III.

In diesem Paragraphen soll der Spezialfall

$$k = 1, \quad l = m = 0, \quad n < 0$$

untersucht werden. Schreibt man dann $n\varphi(x, y)$ an Stelle von $\varphi(x, y)$ und setzt noch $n = -a$, so lautet die Differentialgleichung:

(B) $$[x + f(x, y)]\,dy + a[y + \varphi(x, y)]\,dx = 0 \qquad (a > 0).$$

Über sie beweisen wir den

Satz 2. *Wenn die Funktionen* $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ *in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes (diesen mitgerechnet) stetig sind und den Bedingungen genügen:*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x,y)}{|x|+|y|} = 0,$$

so hat die Differentialgleichung (B) *mindestens ein Integral der Form* $y = P(x)$, *wobei* $P(x)$ *für hinreichend kleine* $|x|$ *existiert und eine stetige Ableitung* $P'(x)$ *hat, und wobei* $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$ *ist. Ebenso gibt es auch mindestens ein Integral der Form* $x = Q(y)$, *wobei* $Q(y)$ *für hinreichend kleine* $|y|$ *existiert und eine stetige Ableitung* $Q'(y)$ *hat, und wobei* $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 0$ *ist.*

Da die Voraussetzungen in bezug auf x und y völlig symmetrisch sind, wird es genügen, die Existenz des Integrals $y = P(x)$ nachzuweisen. Es wird ferner genügen, diesen Nachweis auf die Werte $x \geqq 0$ zu beschränken, da sich durch die Transformation $x = -x'$ dann sofort auch die Existenz für $x \leqq 0$ ergibt.

Aus den Voraussetzungen folgt die Existenz einer positiven Zahl b, so daß für $|x| \leqq b$, $|y| \leqq b$

$$1) \qquad \begin{cases} |f(x,y)| \leqq \frac{1}{3}(|x|+|y|), \\ |\varphi(x,y)| \leqq \frac{1}{3}(|x|+|y|) \end{cases}$$

ist. Wenn nun ξ irgendeine Zahl des Intervalles $0 < \xi \leqq b$ bedeutet, so bezeichnen wir die obere Grenze des Quotienten

$$\frac{|\varphi(x,y)|}{|x|+|y|}$$

im Bereich

$$|x|+|y| > 0, \qquad |x| \leqq \xi, \qquad |y| \leqq \xi$$

mit $\psi(\xi)$ und setzen außerdem $\psi(0) = 0$. Dann ist die Funktion $\psi(\xi)$ im Intervall $0 \leqq \xi \leqq b$ stetig, monoton wachsend und $\leqq \frac{1}{3}$. Daher wird auch die Funktion

$$2) \qquad \chi(x) = \frac{x\psi(x)}{1-\psi(x)}$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq b$ stetig sein und monoton wachsen; außerdem ist

$$3) \qquad \chi(0) = 0, \qquad \chi(x) \leqq \frac{1}{2}x \leqq x,$$

$$4) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\chi(x)}{x} = 0.$$

Nun definieren wir im Bereich

$$(5) \qquad \begin{cases} 0 \leqq x \leqq b, \\ -\chi(x) \leqq y \leqq \chi(x) \end{cases}$$

eine Funktion $F(x, y)$ durch die Formeln

$$F(x, y) = -a\frac{y+\varphi(x, y)}{x+f(x, y)} \quad \text{für} \quad |x|+|y|>0,$$
$$F(0, 0) = 0.$$

Offenbar ist im Bereich (5) wegen (1) und (3)

$$x+f(x, y) \geqq x-\frac{1}{3}(x+|y|) \geqq \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\chi(x) \geqq \frac{1}{2}x,$$

und mit Rücksicht auf die Definition von $\psi(x)$:

$$|y+\varphi(x, y)| \leqq |y|+|\varphi(x, y)| \leqq \chi(x)+\psi(x)[x+\chi(x)] = 2\chi(x).$$

Daraus erkennt man mit Rücksicht auf (4), daß die Funktion $F(x, y)$ in ihrem Definitionsbereich (5) stetig ist.

Ferner ist für $0 \leqq x \leqq b$

$$\chi(x)+\varphi(x, \chi(x)) \geqq \chi(x)-\psi(x)[x+\chi(x)] = 0,$$

und also

$$(6) \qquad F(x, \chi(x)) \leqq 0.$$

Dagegen ist

$$-\chi(x)+\varphi(x, -\chi(x)) \leqq -\chi(x)+\psi(x)[x+\chi(x)] = 0,$$

und also

$$(7) \qquad F(x, -\chi(x)) \geqq 0.$$

Da die Funktion $\chi(x)$ monoton wächst, sind ihre vier Derivierten $\geqq 0$. Nach (6) und (7) ist also, wenn man

$$-\chi(x) = \omega_1(x), \qquad \chi(x) = \omega_2(x)$$

setzt, für $0 \leqq x \leqq b$

$$D\omega_1(x) \leqq F(x, \omega_1(x)),$$
$$D\omega_2(x) \geqq F(x, \omega_2(x)),$$

wo D jede der vier Derivierten bedeuten darf. Nach einem allgemeinen Existenzsatz[2]) hat daher die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

---

[2]) Vgl. meine Arbeit: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. [Math. Annalen 76 (1915), S. 471–484]. Bei der dortigen Formulierung in § 1 ist allerdings angenommen, daß die Funktionen $\omega_1(x)$ und $\omega_2(x)$

im Bereich (5) mindestens ein Integral $y = P(x)$. Dabei ist wegen (5) und (4)

$$P(0) = 0,$$

$$P'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = 0,$$

womit Satz 2 bereits bewiesen ist.

§ 3.

Bedingungen für Eindeutigkeit.

Die in Satz 2 nachgewiesenen Integralkurven brauchen nicht die einzigen ihrer Art zu sein. Betrachtet man z. B. die Differentialgleichung[3])

$$(x - 4y\sqrt{|xy|})\,dy + (y - 4x\sqrt{|xy|})\,dx = 0,$$

so sind zunächst die Koordinatenachsen Integralkurven, die dem Satz 2 entsprechen. Sieht man von diesen ab, so geht die Differentialgleichung nach Division durch $2\sqrt{|xy|}$ über in

$$\frac{x\,dy + y\,dx}{2\sqrt{|xy|}} = 2x\,dx + 2y\,dy,$$

und daraus folgt durch Integration:

$$\sqrt{|xy|} \cdot \operatorname{sign}(xy) = x^2 + y^2 + C.$$

Für $C = 0$ ist diese Kurve eine Lemniskate, die im Nullpunkt einen Doppelpunkt hat und daselbst die Koordinatenachsen berührt; die beiden Äste durch den Nullpunkt entsprechen ebenfalls dem Satz 2.

Um daher Eindeutigkeit der Integrale $y = P(x)$ und $x = Q(y)$ zu erzwingen, sind weitere Voraussetzungen nötig. Wir wollen voraussetzen, daß die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2}, \qquad \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2},$$

$$\frac{\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y)}{x_1 - x_2}, \qquad \frac{\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

einen bestimmten vorderen und einen bestimmten hinteren Differentialquotienten haben; doch gilt der Satz auch ohne diese Voraussetzung, und der Beweis bleibt fast wörtlich derselbe. — Übrigens kann man im Text auch leicht die Funktion $\chi(x)$ durch eine andere ersetzen, die sicher einen bestimmten vorderen und einen bestimmten hinteren Differentialquotienten hat. Zu dem Zweck ist nur nötig, an Stelle von $\psi(x)$ die *kleinste konvexe* Funktion, die $\geqq \psi(x)$ ist, zu setzen. Die neue Funktion $\psi(x)$ ist dann ebenfalls monoton wachsend und hat außerdem einen bestimmten vorderen und einen bestimmten hinteren Differentialquotienten. Das gleiche gilt daher auch von der neuen Funktion $\chi(x)$, und im übrigen bleiben alle Schlüsse wörtlich bestehen.

[3]) Um den Sinn dieser Differentialgleichung nicht mißzuverstehen, beachte man, daß unter $\sqrt{\xi}$ im Reellen immer nur die *nicht negative* Zahl zu verstehen ist, deren Quadrat gleich ξ ist.

bei Annäherung an den Nullpunkt absolut unter jede positive Grenze sinken[4]); dann sind sie insbesondere beschränkt, so daß zunächst Satz 1 gilt. Ferner gehen durch den Nullpunkt nach Satz 2 die Integralkurven $y = P(x)$ und $x = Q(y)$, die die X- bzw. Y-Achse berühren. Wir wollen zeigen, daß diese eindeutig sind, und daß keine weiteren Integralkurven in den Nullpunkt münden. Zu dem Zweck führen wir neue Variable ξ, η ein, indem wir setzen:

$$(1) \qquad \begin{cases} x - Q(y) = \xi, \\ y - P(x) = \eta. \end{cases}$$

Da die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 - Q'(y)P'(x)$$

am Nullpunkt gleich 1 ist, lassen sich die Gleichungen (1) eindeutig nach x, y auflösen, und es ist

$$dx - Q'(y)dy = d\xi,$$
$$dy - P'(x)dx = d\eta,$$

also

$$[1 - Q'(y)P'(x)]dx = d\xi + Q'(y)d\eta,$$
$$[1 - Q'(y)P'(x)]dy = P'(x)d\xi + d\eta.$$

Die Differentialgleichung (B) geht daher über in:

$$(2) \qquad \{[x + f(x,y)] + a[y + \varphi(x,y)]Q'(y)\}d\eta + \{[x + f(x,y)]P'(x) + a[y + \varphi(x,y)]\}d\xi = 0,$$

wo überall x, y durch ξ, η auszudrücken sind. Da aber $x = Q(y)$ und $y = P(x)$ Integrale von (B) sind, ergeben sich aus (B) die Identitäten:

$$[Q(y) + f(Q(y), y)] + a[y + \varphi(Q(y), y)]Q'(y) = 0,$$
$$[x + f(x, P(x))]P'(x) + a[P(x) + \varphi(x, P(x))] = 0;$$

oder da nach (1) ja $Q(y) = x - \xi$ und $P(x) = y - \eta$ ist:

$$[x - \xi + f(x - \xi, y)] + a[y + \varphi(x - \xi, y)]Q'(y) = 0,$$
$$[x + f(x, y - \eta)]P'(x) + a[y - \eta + \varphi(x, y - \eta)] = 0.$$

Multipliziert man diese Identitäten mit $d\eta$ und $d\xi$ und subtrahiert sie dann von der Differentialgleichung (2), so geht letztere über in:

$$(3) \qquad \{[\xi + f(x,y) - f(x - \xi, y)] + a[\varphi(x,y) - \varphi(x - \xi, y)]Q'(y)\}d\eta + \{[f(x,y) - f(x, y - \eta)]P'(x) + a[\eta + \varphi(x,y) - \varphi(x, y - \eta)]\}d\xi = 0,$$

wo natürlich wieder x, y durch ξ, η ausgedrückt zu denken sind.

---

[4]) Diese Voraussetzung ist z. B. immer erfüllt, wenn $f(x,y)$ und $\varphi(x,y)$ stetige partielle Ableitungen nach x und y haben, die am Nullpunkt verschwinden.

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$G(\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)-f(x-\xi,y)}{\xi}+a\,\dfrac{\varphi(x,y)-\varphi(x-\xi,y)}{\xi}\,Q'(y) & \text{für } \xi\neq 0\\ 0 & \text{für } \xi=0,\end{cases}$$

$$H(\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)-f(x,y-\eta)}{\eta}\,P'(x)+a\,\dfrac{\varphi(x,y)-\varphi(x,y-\eta)}{\eta} & \text{für } \eta\neq 0\\ 0 & \text{für } \eta=0,\end{cases}$$

o sind die Funktionen $G(\xi,\eta)$, $H(\xi,\eta)$ zwar an den Linien $\xi=0$ zw. $\eta=0$ im allgemeinen unstetig. Aber in genügender Nähe des Nullunktes sind sie auf Grund unserer über die Differenzenquotienten gemachten Voraussetzung absolut beliebig klein, also jedenfalls kleiner als 1; nd die Differentialgleichung nimmt die einfache Gestalt an:

$$\xi[1+G(\xi,\eta)]\,d\eta+a\eta[1+H(\xi,\eta)]\,d\xi=0. \tag{4}$$

Hier erkennt man zunächst wieder die Integralkurven $\xi=0$ und $=0$, die nach (1) den Kurven $x=Q(y)$ und $y=P(x)$ entsprechen. Man sieht aber auch, daß keine weitere Integralkurve in den Nullpunkt inmündet. Denn für jede weitere Integralkurve muß $\frac{\eta}{\xi}$ in genügender Nähe des Nullpunkts konstantes Vorzeichen haben [5]), und nach der Differentialgleichung (4) hat dann

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-a\,\frac{\eta}{\xi}\,\frac{1+H(\xi,\eta)}{1+G(\xi,\eta)}$$

as entgegengesetzte Vorzeichen. Aber eine solche Kurve kann unmöglich den Nullpunkt münden, was geometrisch evident ist und analytisch so ngesehen wird: Wenn t einen beliebigen Kurvenpunkt und τ den Nullunkt bedeutet, so wäre für eine solche Kurve nach dem erweiterten ittelwertsatz

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)_t=\frac{\eta_t-\eta_\tau}{\xi_t-\xi_\tau}=\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_u,$$

o u einen gewissen mittleren Kurvenpunkt bezeichnet. Nun müßten nerseits $\left(\frac{\eta}{\xi}\right)_t$ und $\left(\frac{\eta}{\xi}\right)_u$ gleiches Vorzeichen haben, anderseits aber $\left(\frac{\eta}{\xi}\right)_u$ nd $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_u$ entgegengesetztes; daher hätten auch $\left(\frac{\eta}{\xi}\right)_t$ und $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_u$ entgegengesetztes Vorzeichen, was der obigen Formel widerspricht.

Zusammenfassend gelangen wir so zu dem

Satz 3. *Wenn zu den Voraussetzungen von Satz 2 noch die hinzummt, daß die Differenzenquotienten*

[5]) Weil eine solche Integralkurve nämlich wegen Satz 1 die Integralkurven $\xi=0$ d $\eta=0$ außer im Nullpunkt nicht treffen kann.

$$\frac{f(x_1,y)-f(x_2,y)}{x_1-x_2}, \qquad \frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2},$$
$$\frac{\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)}{x_1-x_2}, \qquad \frac{\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)}{y_1-y_2}$$

bei Annäherung an den Nullpunkt absolut unter jede positive Grenze sinken, so sind die Integrale $y=P(x)$ und $x=Q(y)$ eindeutig, und die betreffenden Integralkurven teilen also die Umgebung des Nullpunktes in vier Quadranten. Durch jeden vom Nullpunkt verschiedenen Punkt seiner Umgebung geht genau eine Integralkurve; aber außer den beiden genannten kommt keine an den Nullpunkt heran.

Hiernach charakterisiert sich der Nullpunkt als ein *Sattelpunkt*, und die Integralkurven der Differentialgleichung (B) verhalten sich annähernd wie die der einfacheren Differentialgleichung

$$x\,dy + a\,y\,dx = 0.$$

Das ist um so bemerkenswerter, als bei der Differentialgleichung

$$[x+f(x,y)]\,dy - [y+\varphi(x,y)]\,dx = 0 \tag{5}$$

an $f(x,y)$ und $\varphi(x,y)$ weit höhere Forderungen gestellt werden müssen, damit die Integrale sich annähernd wie die der einfacheren Differentialgleichung

$$x\,dy - y\,dx = 0 \tag{6}$$

verhalten. Denn z. B. erfüllen die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{-2y}{\log(x^2+y^2)}, \qquad \varphi(x,y) = \frac{2x}{\log(x^2+y^2)}$$

alle Voraussetzungen von Satz 3 (vgl. dazu Fußnote [4]). Trotzdem verhalten sich die Integralkurven der Gleichung (5) ganz anders als die der Gleichung (6). Vgl. dazu erster Teil, § 3, wonach der Nullpunkt bei (5) ein Strudelpunkt ist, während bei (6) offenbar ein Knotenpunkt vorliegt.

§ 4.

Ein Spezialfall der Fälle IV und V.

Wir wenden uns jetzt zu dem Spezialfall

$$l=1, \quad m=-1, \quad n=k.$$

Dann geht die Differentialgleichung (A) über in folgende:

$$x\,dx + y\,dy + k(x\,dy - y\,dx) + f(x,y)\,dy - \varphi(x,y)\,dx = 0. \tag{C}$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega \tag{1}$$

ntsteht aus (C):

$$[r + F_1(r,\omega)]\,dr + [kr^2 + rF_2(r,\omega)]\,d\omega = 0, \tag{2}$$

vobei zur Abkürzung

$$\begin{cases} f(r\cos\omega, r\sin\omega)\cdot\sin\omega - \varphi(r\cos\omega, r\sin\omega)\cdot\cos\omega = F_1(r,\omega), \\ f(r\cos\omega, r\sin\omega)\cdot\cos\omega + \varphi(r\cos\omega, r\sin\omega)\cdot\sin\omega = F_2(r,\omega) \end{cases} \tag{3}$$

gesetzt ist. Die Funktionen $F_1(r,\omega)$, $F_2(r,\omega)$ sind in bezug auf ω periodisch mit der Periode 2π.

Nun seien wieder $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes stetig, und es sei auch wieder

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x,y)}{|x|+|y|} = 0; \tag{4}$$

lann ist auch

$$\lim_{r\to+0} \frac{F_1(r,\omega)}{r} = 0, \qquad \lim_{r\to+0} \frac{F_2(r,\omega)}{r} = 0, \tag{5}$$

ınd zwar gleichmäßig für alle ω. Setzt man daher für $r > 0$

$$\frac{kr + F_2(r,\omega)}{r + F_1(r,\omega)} = \Psi(r,\omega), \tag{6}$$

o ist auch $\Psi(r,\omega)$ in bezug auf ω periodisch mit der Periode 2π, und s ist

$$\lim_{r\to+0} \Psi(r,\omega) = k \tag{7}$$

gleichmäßig für alle ω. Außerdem folgt aus der Stetigkeit von $f(x,y)$ ınd $\varphi(x,y)$ natürlich die Stetigkeit von $F_1(r,\omega)$, $F_2(r,\omega)$ und auch on $\Psi(r,\omega)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes (diesen *nicht* nitgerechnet; für $r = 0$ ist ja $\Psi(r,\omega)$ gar nicht definiert). Die Differentialleichung aber nimmt jetzt die einfache Gestalt an:

$$\frac{dr}{d\omega} = -r\Psi(r,\omega). \tag{8}$$

Nun setzen wir zunächst $k > 0$ voraus. Wegen (7) ist dann für ein inreichend kleines r, etwa für $0 < r \leqq r_0$:

$$\frac{1}{2}k \leqq \Psi(r,\omega) \leqq 2k. \tag{9}$$

Fragt man jetzt nach einem Integral r der Differentialgleichung (8), elches nie negativ wird und für den willkürlichen Wert $\omega = \omega_0$ einen orgegebenen Wert $r = c$ annimmt, wobei $0 < c \leqq r_0$ sein soll, so soll unächst gezeigt werden: *Wenn* ein solches Integral für alle ω, die $\geqq \omega_0$

sind, existiert, so bleibt r positiv und nimmt mit wachsendem ω stets ab, und zwar ist

$$\lim_{\omega \to \infty} r = 0. \tag{10}$$

In der Tat ist nach (8) und (9), solange r positiv bleibt,

$$-2kr \leqq \frac{dr}{d\omega} \leqq -\frac{1}{2}kr < 0;$$

folglich nimmt r mit wachsendem ω ab Indem man durch r dividiert und von der unteren Grenze ω_0 an integriert, erhält man:

$$-2k(\omega - \omega_0) \leqq \log r - \log c \leqq -\frac{1}{2}k(\omega - \omega_0),$$

oder also:

$$ce^{-2k(\omega-\omega_0)} \leqq r \leqq ce^{-\frac{1}{2}k(\omega-\omega_0)}.$$

Die erste dieser Ungleichungen lehrt, daß, solange r positiv bleibt, es nicht unter $ce^{-2k(\omega-\omega_0)}$ herabsinken kann; daher bleibt r *dauernd* positiv; anderseits folgt aus der letzten der beiden Ungleichungen die Richtigkeit von (10).

Nun ist noch zu zeigen, *daß* ein Integral r der verlangten Art auch wirklich existiert. Zu dem Zweck betrachten wir die Funktionen

$$\Omega_1(\omega) = ce^{-2k(\omega-\omega_0)},$$

$$\Omega_2(\omega) = ce^{-\frac{1}{2}k(\omega-\omega_0)}.$$

Diese nehmen für $\omega = \omega_0$ den Wert c an und genügen außerdem für $\omega \geqq \omega_0$ den Ungleichungen:

$$\frac{d\Omega_1(\omega)}{d\omega} = -2k\Omega_1(\omega) \leqq -\Omega_1(\omega) \cdot \Psi(\Omega_1(\omega), \omega),$$

$$\frac{d\Omega_2(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2}k\Omega_2(\omega) \geqq -\Omega_2(\omega) \cdot \Psi(\Omega_2(\omega), \omega).$$

Nach dem schon oben bemerkten Existenzsatz (Fußnote [3])) gibt es also mindestens ein Integral r der verlangten Art, und zwar ist

$$\Omega_1(\omega) \leqq r \leqq \Omega_2(\omega).$$

Wenden wir uns jetzt dem Fall $k < 0$ zu, so kommt dieser auf den behandelten zurück, wenn ω durch $-\omega$ ersetzt wird. Zusammenfassend ergibt sich so der

Satz 4. *Bei der Differentialgleichung*

$$x\,dx + y\,dy + k(x\,dy - y\,dx) + f(x,y)\,dy - \varphi(x,y)\,dx = 0 \quad (k \neq 0)$$

seien die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ *in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes (diesen mitgerechnet) stetig, und es sei*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x,y)}{|x|+|y|} = 0.$$

Dann geht durch jeden in genügender Nähe des Nullpunktes gelegenen, aber vom Nullpunkt verschiedenen Punkt x_0, y_0 *mindestens eine Integralkurve, und all diese Kurven winden sich unendlich oft um den Nullpunkt und haben ihn zum asymptotischen Punkt. Sie winden sich nach innen in positiver Richtung, wenn* $k > 0$, *in negativer Richtung, wenn* $k < 0$ *ist.*

Der Nullpunkt ist hiernach ein *Strudelpunkt*. Wenn die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ beschränkte Differenzenquotienten haben, läßt sich Satz 4 nach Satz 1 noch dahin ergänzen, daß durch jeden Punkt auch *nur eine* Integralkurve geht. Andernfalls können von einem Punkt sehr wohl mehrere Integralkurven ausgehen. Aber welchen Ast man bei einer Verzweigung auch verfolgen mag, man nähert sich asymptotisch dem Nullpunkt. Wir geben dazu ein Beispiel, das wir gleich in Polarkoordinaten schreiben:

$$\frac{dr}{d\omega} = -r\,(1 - r\sqrt{|\sin(\log r + \omega)|}).$$

Hier erkennt man sofort, daß die logarithmische Spirale $r = e^{-\omega}$ eine Integralkurve ist. Aber durch jeden ihrer Punkte geht noch eine andere Integralkurve. Um das einzusehen und die Gleichung vollständig zu integrieren, setze man

$$\log r + \omega = z.$$

Dadurch geht die Differentialgleichung über in:

$$\frac{dz}{d\omega} = e^{z-\omega}\sqrt{|\sin z|}.$$

Hier lassen sich, wenn man von der Integralkurve $z = 0$, d. h. $r = e^{-\omega}$ absieht, die Variablen trennen, und man findet:

$$\int_0^z \frac{e^{-z}}{\sqrt{|\sin z|}}\,dz = C - e^{-\omega},$$

wo C eine willkürliche Konstante. Links steht eine stets wachsende Funktion von z, die für alle z existiert und für $z = 0$ verschwindet. Daher ist auch umgekehrt

$$z = \psi(C - e^{-\omega}),$$

wo $\psi(u)$ eine mit u wachsende Funktion ist, die für $u = 0$ verschwindet. Dann ist aber

$$r = e^{z-\omega} = e^{-\omega+\psi(C-e^{-\omega})}.$$

Das ist die Gleichung der allgemeinen Integralkurve; man sieht, daß sie, wenn $C > 0$ ist, für $\omega = -\log C$ die Integralkurve $r = e^{-\omega}$ trifft. Letztere wird also in der Tat in jedem ihrer Punkte von einer zweiten Integralkurve getroffen.

§ 5.

Fortsetzung: Der Fall $k = 0$.

Viel verwickelter ist die Sache im Fall $k = 0$. Dann handelt es sich in Polarkoordinaten um die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\omega} = -r\Psi(r, \omega), \tag{1}$$

wo $\Psi(r, \omega)$ für hinreichend kleine positive r eine stetige Funktion von r und ω ist und in bezug auf ω die Periode 2π hat, und wo gleichmäßig für alle ω

$$\lim_{r \to +0} \Psi(r, \omega) = 0 \tag{2}$$

ist. Wir werden aber an Stelle von (2) mit der viel geringeren Voraussetzung auskommen, daß für hinreichend kleine positive r

$$|\Psi(r, \omega)| \leqq K \tag{3}$$

ist, wo K von r und ω nicht abhängt. Gilt die Ungleichung (3) etwa für $0 < r \leqq r_0$, so sei c eine Zahl des Intervalles

$$0 < c \leqq r_0 e^{-2K\pi}, \tag{4}$$

und sei ω_0 ein beliebiger Wert von ω.

Wenn es dann ein Integral $r = r(\omega)$ der Differentialgleichung (1) gibt, das für $\omega = \omega_0$ den Wert $r(\omega_0) = c$ annimmt, so wollen wir zeigen, daß, soweit r überhaupt existiert, stets $r > 0$ ist, *so daß die Integralkurve für ein endliches ω nie an den Nullpunkt herankommt.* In der Tat ist für $\omega = \omega_0$ jedenfalls

$$r(\omega) > \frac{1}{2} c e^{-2K|\omega - \omega_0|}, \tag{5}$$

und wir wollen beweisen, daß das sogar für alle ω gilt, woraus dann sofort die Richtigkeit der Behauptung $r > 0$ erhellt.

Wäre nämlich (5) etwa für $\omega > \omega_0$ nicht dauernd richtig, so müßte es einen kleinsten Wert $\omega (> \omega_0)$ geben, für den

$$r(\omega) = \frac{1}{2} c e^{-2K(\omega - \omega_0)}$$

wäre, und für diesen Wert ω müßte gleichzeitig

$$\frac{dr}{d\omega} \leqq \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2} c e^{-2K(\omega - \omega_0)}\right) = -Kce^{-2K(\omega - \omega_0)}$$

ein; also

$$\frac{dr}{d\omega} \leqq -2Kr < -r|\Psi(r,\omega)| \leqq -r\Psi(r,\omega),$$

m Widerspruch mit der Differentialgleichung (1).

Wäre aber die Ungleichung (5) etwa für $\omega < \omega_0$ nicht immer richtig, o müßte es einen größten Wert $\omega\,(<\omega_0)$ geben, für den

$$r(\omega) = \frac{1}{2}\,c\,e^{2K(\omega-\omega_0)},$$

$$\frac{dr}{d\omega} \geqq \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2}\,c\,e^{2K(\omega-\omega_0)}\right) = K\,c\,e^{2K(\omega-\omega_0)}$$

äre; also

$$\frac{dr}{d\omega} \geqq 2Kr > r|\Psi(r,\omega)| \geqq -r\Psi(r,\omega),$$

ieder im Widerspruch mit der Differentialgleichung (1).

Nun soll aber auch bewiesen werden, daß wirklich ein Integral existiert, as für $\omega = \omega_0$ den Wert $r = c$ annimmt. Wir zeigen das zunächst für as Intervall $\omega_0 \leqq \omega \leqq \omega_0 + 2\pi$. Zu dem Zweck setzen wir

$$\Omega_1(\omega) = c\,e^{-K(\omega-\omega_0)},$$
$$\Omega_2(\omega) = c\,e^{K(\omega-\omega_0)};$$

nn ist $\Omega_1(\omega_0) = c$, $\Omega_2(\omega_0) = c$, und außerdem für $\omega_0 \leqq \omega \leqq \omega_0 + 2\pi$:

$$\frac{d\Omega_1(\omega)}{d\omega} = -K\,\Omega_1(\omega) \leqq -\Omega_1(\omega)\cdot\Psi(\Omega_1(\omega),\omega),$$

$$\frac{d\Omega_2(\omega)}{d\omega} = \quad K\,\Omega_2(\omega) \geqq -\Omega_2(\omega)\cdot\Psi(\Omega_2(\omega),\omega).$$

Nach dem schon mehrfach benutzten Existenzsatz (Fußnote [2])) gibt also ein Integral $r = r(\omega)$ der verlangten Art, und zwar ist

$$c\,e^{-K(\omega-\omega_0)} \leqq r \leqq c\,e^{K(\omega-\omega_0)} \quad \text{für} \quad \omega_0 \leqq \omega \leqq \omega_0 + 2\pi.$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden.

Erstens kann es sein, daß

$$r(\omega_0 + 2\pi) = r(\omega_0)$$

; dann liegt eine *geschlossene Integralkurve* vor mit dem Nullpunkt im nern; doch wird das nur ausnahmsweise eintreten.

Zweitens kann es sein, daß

$$r(\omega_0 + 2\pi) < r(\omega_0)$$

; dann läßt sich die Integralkurve über $\omega_0 + 2\pi$ hinaus fortsetzen. nn dabei dauernd $r(\omega + 2\pi) < r(\omega)$ bleibt, so ist unbegrenzte Fort- zung möglich, und die Integralkurve windet sich unendlich oft in posi- er Richtung nach innen um den Nullpunkt. Wenn aber nicht dauernd

$r(\omega + 2\pi) < r(\omega)$ bleibt, so muß einmal $r(\omega + 2\pi) = r(\omega)$ werden und die Integralkurve mündet daher in eine geschlossene Integralkurve ein, die den Nullpunkt im Innern enthält.

Drittens kann es auch sein, daß

$$r(\omega_0 + 2\pi) > r(\omega_0)$$

ist. Dann kann man die Integralkurve nach der andern Seite (d. h. $\omega < \omega_0$) fortsetzen, wobei sie entweder unendlich oft in negativer Richtung sich nach innen um den Nullpunkt windet oder wieder in eine geschlossene Integralkurve einmündet, die den Nullpunkt im Innern enthält.

Natürlich ist es im zweiten Fall nicht ausgeschlossen, daß die Kurve sich auch nach der andern Seite fortsetzen läßt und dabei in eine geschlossene Integralkurve mit dem Nullpunkt im Innern einmündet oder an den Rand des Gültigkeitsbereiches von (3) kommt oder, ohne an diesen Rand zu kommen, sich unendlich oft nach außen windet. Analoges gilt vom dritten Fall.

Es soll jetzt noch gezeigt werden, *daß eine unendlich oft sich um den Nullpunkt nach innen oder außen windende Integralkurve sich asymptotisch dem Nullpunkt oder einer geschlossenen Integralkurve nähert.* Das ist zwar in der Literatur schon mehrfach bewiesen worden, aber nicht unter den geringen Voraussetzungen, die wir hier gemacht haben[6]). Sei $r = r(\omega)$ die Integralkurve, die sich etwa nach innen winden möge. Setzt man dann

$$r(\omega \pm 2\nu\pi) = r_\nu(\omega) = r_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$ (6)

wobei das obere oder untere Zeichen gelten soll, je nachdem die Kurve sich nach innen in positiver oder negativer Richtung windet, so ist auch

---

[6]) Unter den bisher geringsten Voraussetzungen wohl von Bendixson, der aber doch die Existenz stetiger partieller Ableitungen von $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ ganz wesentlich benutzt, in der Arbeit: Sur les courbes définies par des équations différentielles. [Acta Mathematica **24** (1900), S. 1–88], insbes. S. 12, 13.

Zusatz bei der Korrektur. Wie ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn Bieberbach entnehme, hat auch Herr Brouwer im Rahmen einer allgemeineren rein topologisch-geometrischen Untersuchung den Satz doch unter ebenso geringen Voraussetzungen bewiesen, wie sie hier gemacht werden. Man vergleiche Herrn Brouwers Arbeit: On continuous vector distribution on surfaces, 1. und 2. Mitteilung. [Verhandelingen der koninklije Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 11_2 (1909), S. 850, 12_2 (1910), S. 716]. Ich glaube, daß meine sehr einfachen den speziellen Problem angepaßten rein analytischen Betrachtungen trotzdem noch Interesse beanspruchen dürfen.

$r_\nu(\omega)$ ein Integral der Differentialgleichung (1), das wir etwa im Intervall $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$ betrachten wollen. Offenbar ist

$$r_\nu(2\pi) = r_{\nu+1}(0), \tag{7}$$

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots. \tag{8}$$

Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{\nu\to\infty} r_\nu = R = R(\omega), \tag{9}$$

und es ist

$$R(2\pi) = R(0). \tag{10}$$

Außerdem ist aber nach der Differentialgleichung (1)

$$\left|\frac{dr_\nu}{d\omega}\right| = |r_\nu \Psi(r_\nu, \omega)| \leqq G,$$

wo G von ν und ω nicht abhängt. Daraus folgt:

$$|r_\nu(\omega') - r_\nu(\omega'')| \leqq G|\omega' - \omega''|.$$

Nach dem in § 8 formulierten und bewiesenen Hilfssatz gilt daher *die Gleichung* (9) *gleichmäßig im Intervall* $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$ *und* $R(\omega)$ *ist daselbst eine stetige Funktion.* Wegen (10) ist die Kurve mit der Gleichung $r = R(\omega)$ geschlossen, falls nicht etwa $R(\omega)$ identisch verschwindet, in welchem Fall der Nullpunkt asymptotischer Punkt ist. Sie ist aber auch eine Integralkurve; denn für $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$ ist gleichmäßig

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{dr_\nu}{d\omega} = -\lim_{\nu\to\infty} r_\nu \Psi(r_\nu, \omega) = -R\Psi(R, \omega),$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$\lim_{\nu\to\infty} [r_\nu(\omega) - r_\nu(0)] = -\int_0^\omega R\Psi(R, \omega)\, d\omega.$$

Die linke Seite ist aber gleich $R(\omega) - R(0)$, so daß man durch Differentiation erhält:

$$\frac{dR}{d\omega} = -R\Psi(R, \omega).$$

Die Funktion $R(\omega)$ ist also wirklich ein Integral der Differentialgleichung (1). W. z. b. w.

Windet sich die Kurve nach außen, so kommt in (8) überall $<$ statt $>$; im übrigen ist der Beweis, sofern nur die $r_\nu = r_\nu(\omega)$ gleichmäßig beschränkt bleiben, ganz der gleiche. Zusammenfassend erhalten wir den

Satz 5. *Wenn in der Differentialgleichung*

$$x\,dx + y\,dy + f(x, y)\,dy - \varphi(x, y)\,dx = 0$$

die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunkts (diesen mitgerechnet) stetig sind und den Bedingungen genügen:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x,y)}{|x|+|y|} = 0,$$

so gibt es keine Integralkurve, die an den Nullpunkt herankommt; dagegen geht durch jeden in hinreichender Nähe des Nullpunkts gelegenen, aber vom Nullpunkt verschiedenen Punkt x_0, y_0 mindestens eine Integralkurve.

Im allgemeinen winden sich alle Integralkurven unendlich oft um den Nullpunkt und haben ihn zum asymptotischen Punkt. Ausnahmsweise kann es aber auch vorkommen, daß alle Integralkurven geschlossen sind und den Nullpunkt im Innern enthalten. Und schließlich kann es auch sein, daß sowohl geschlossene Integralkurven mit dem Nullpunkt im Innern, als auch solche vorkommen, die sich unendlich oft um den Nullpunkt winden. Letztere haben dann innen und außen geschlossene Integralkurven zu asymptotischen Linien[7]*, eventuell auch innen den Nullpunkt zum asymptotischen Punkt.*

Wenn die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ beschränkte Differenzenquotienten haben, so kann Satz 5 wegen Satz 1 wieder dahin ergänzt werden, daß durch jeden Punkt *nur eine* Integralkurve geht. Andernfalls kann es auch mehrere geben. Übrigens ist bis jetzt nur bewiesen worden, daß die in Satz 5 aufgezählten Fälle die einzigen sind, die *möglicherweise* vorkommen können. Daß aber alle Möglichkeiten auch *wirklich* eintreten können, ergibt sich aus den nachstehenden Beispielen, die wir gleich in Polarkoordinaten schreiben.

Beispiel 1.

$$\frac{dr}{d\omega} = -r^2.$$

Das allgemeine Integral ist

$$r = \frac{1}{\omega + C},$$

wo C eine willkürliche Konstante. Also winden sich alle Integralkurven unendlich oft in positiver Richtung nach innen um den Nullpunkt und haben ihn zum asymptotischen Punkt.

Beispiel 2.

$$\frac{dr}{d\omega} = 0.$$

Hier sind die Integralkurven Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, also sämtlich geschlossen.

---

[7]) *Außen* natürlich nur, sofern sie in einem gewissen beschränkten Bereich bleiben.

Beispiel 3.

$$\frac{dr}{d\omega} = r^2 \sin\frac{1}{r}.$$

Hier gibt es abzählbar unendlich viele geschlossene Integralkurven, nämlich die Kreise

$$r = \frac{1}{n\pi} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kreisen

$$r = \frac{1}{n\pi} \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{(n+1)\pi}$$

als asymptotischen Linien winden sich unendlich viele nicht geschlossene Integralkurven, deren Gleichung

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2 \sin\frac{1}{r}} = \omega + C$$

lautet, wo $\frac{1}{n\pi} > r_0 > \frac{1}{(n+1)\pi}$, und C eine willkürliche Konstante ist.

Beispiel 4.

$$\frac{dr}{d\omega} = r^2 \sqrt{\left|\sin\frac{1}{r}\right|}.$$

Hier gibt es durch gewisse Punkte mehrere Integralkurven, so daß Verzweigungen stattfinden. Zunächst sind nämlich wieder die Kreise

$$r = \frac{1}{n\pi} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

geschlossene Integralkurven. Daneben gibt es aber auch die Integralkurven mit der Gleichung

$$\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\left|\sin\frac{1}{r}\right|}} = \omega + C,$$

wo wieder C eine willkürliche Konstante ist. Diese winden sich unendlich oft in negativer Richtung nach innen um den Nullpunkt und haben ihn zum asymptotischen Punkt. Sie durchsetzen zugleich die obigen Kreise, und zwar findet in jedem Punkt eines solchen Kreises eine Verzweigung von Integralkurven statt.

Beispiel 5.

$$\frac{dr}{d\omega} = r\,F(r);$$

dabei sei die Funktion $F(r)$ folgendermaßen definiert:

$$F(r)=\begin{cases}\left(r-\frac{1}{2n}\right)\left(r-\frac{1}{2n-1}\right) & \text{für} \quad \frac{1}{2n}\leqq r\leqq\frac{1}{2n-1}\\ 0 & \text{für} \quad \frac{1}{2n+1}<r<\frac{1}{2n}\end{cases} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Hier hat die Menge der geschlossenen Integralkurven die Mächtigkeit des Kontinuums, wie klein auch die Umgebung des Nullpunktes sei, auf die man sich beschränken will; es sind die Kreise

$$r=C, \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{2n+1}\leqq C\leqq\frac{1}{2n} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Trotzdem gibt es aber in jeder Nähe des Nullpunktes auch nicht geschlossene Integralkurven; denn zwischen den beiden Kreisen

$$r=\frac{1}{2n-1} \quad \text{und} \quad r=\frac{1}{2n}$$

als asymptotischen Linien winden sich die Integralkurven mit der Gleichung

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\left(r-\frac{1}{2n}\right)\left(r-\frac{1}{2n-1}\right)}=\omega+C,$$

wobei $\frac{1}{2n}<r_0<\frac{1}{2n-1}$, und C eine willkürliche Konstante ist.

§ 6.

Eine hinreichende Bedingung für das Fehlen geschlossener Integralkurven bei Satz 5.

In Satz 5 wurde es als der allgemeine Fall bezeichnet, daß keine geschlossenen Integralkurven auftreten. Daher ist es von Interesse Kriterien zu haben, die mit Sicherheit das Vorliegen des allgemeinen Falles erkennen lassen. In dieser Richtung beweisen wir den

Satz 6. *Wenn zu den Voraussetzungen von Satz* 5 *noch die weiter kommt, daß*

$$xf(x,y)+y\varphi(x,y)\neq 0$$

außerhalb des Nullpunkts ist, so gibt es keine geschlossenen Integralkurven, sondern alle haben den Nullpunkt zum asymptotischen Punkt. Sie winden sich nach innen in positiver oder negativer Richtung, je nachdem das konstante Vorzeichen von $xf(x,y)+y\varphi(x,y)$ *das positive oder negative ist.*

Greift man nämlich auf die Definition von $\Psi(r,\omega)$ zurück (Formeln (1), (3), (6), Seite 280f. mit $k=0$), so ist

$$\Psi(r,\omega)=\frac{F_2(r,\omega)}{r+F_1(r,\omega)}=\frac{xf(x,y)+y\varphi(x,y)}{r^2+yf(x,y)-x\varphi(x,y)}.$$

Der Nenner ist in hinreichender Nähe des Nullpunkts positiv; also hat $\Psi(r, \omega)$ das Vorzeichen von

$$x f(x, y) + y \varphi(x, y). \tag{1}$$

Wenn nun dieses Vorzeichen stets das positive ist, so lehrt die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\omega} = -r\Psi(r, \omega),$$

daß r mit wachsendem ω stets abnimmt und sich also für $\omega \to \infty$ einem Grenzwert c nähert. Dabei muß aber $c = 0$ sein; denn andernfalls wäre der Kreis $r = c$, da sich die Integralkurve ihm asymptotisch nähert, selbst eine Integralkurve, was aber wegen $\Psi(c, \omega) > 0$ augenscheinlich nicht der Fall ist.

Wenn dagegen das Vorzeichen der Funktion (1), also auch das Vorzeichen von $\Psi(r, \omega)$ stets das negative ist, so nimmt r mit abnehmendem ω ab und nähert sich also für $\omega \to -\infty$ einem Grenzwert, der wieder Null sein muß.

§ 7.

Zurückführung des allgemeinen Falles auf die behandelten Spezialfälle.

Wie im ersten Teil wollen wir jetzt die allgemeine Differentialgleichung (A) durch eine reelle affine Transformation

$$\begin{cases} x = \alpha_1 X + \beta_1 Y \\ y = \alpha_2 X + \beta_2 Y \end{cases} \qquad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0 \tag{1}$$

auf die behandelten Spezialfälle zurückführen. Durch die Transformation (1) geht die Differentialgleichung (A) über in die folgende:

$$[\varkappa X + \lambda Y + F(X, Y)]dY = [\mu X + \nu Y + \Phi(X, Y)]dX, \tag{2}$$

wo $\varkappa$, λ, μ, ν, F, Φ die in § 8 des ersten Teils angegebene Bedeutung haben.

Man bemerkt zunächst, daß in jedem unserer formulierten Sätze mit Ausnahme von Satz 6 die Voraussetzungen, die über $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ gemacht wurden, affin invariant sind. Ihr Erfülltsein zieht also stets auch das Erfülltsein der gleichen Voraussetzungen bei $F(X, Y)$ und $\Phi(X, Y)$ nach sich, und umgekehrt. Außerdem rechnet man leicht die Identität nach:

$$(\varkappa X + \lambda Y)\Phi - (\mu X + \nu Y)F = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[(kx + ly)\varphi - (mx + ny)f]. \tag{3}$$

Nun behandeln wir die drei letzten Fälle des § 1 gesondert.

Fall III.

$$(k - n)^2 + 4lm > 0, \qquad kn - lm < 0.$$

Hier hat die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} k-\varrho & l \\ m & n-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

eine positive Wurzel ϱ und eine negative Wurzel σ. Wählt man die Transformationskoeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ so, daß

$$\varrho\alpha_1 = k\alpha_1 + l\alpha_2, \qquad \sigma\beta_1 = k\beta_1 + l\beta_2,$$
$$\varrho\alpha_2 = m\alpha_1 + n\alpha_2, \qquad \sigma\beta_2 = m\beta_1 + n\beta_2,$$
$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{\varrho}$$

ist, so findet man:

$$\varkappa = 1, \qquad \lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = \frac{\sigma}{\varrho} < 0,$$

und die Differentialgleichung (2) ist daher die folgende:

$$[X + F(X, Y)]\,dY = [\nu Y + \Phi(X, Y)]\,dX.$$

Schreibt man $\nu\,\Phi(X, Y)$ statt $\Phi(X, Y)$, so hat diese Differentialgleichung, weil $\nu < 0$ ist, die Form (B), und folglich ergibt sich aus den Sätzen 2 und 3 der

Satz 7. *Wenn die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes (diesen mitgerechnet) stetig sind und den Bedingungen genügen*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|} = 0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x, y)}{|x| + |y|} = 0,$$

so hat die Differentialgleichung

$$[kx + ly + f(x, y)]\,dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\,dx,$$

wobei[8])

$$(k-n)^2 + 4lm > 0, \qquad kn - lm < 0,$$

mindestens zwei Integralkurven, die mit bestimmten und zwar verschiedenen Tangentenrichtungen durch den Nullpunkt hindurchgehen.

Wenn außerdem die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2}, \qquad \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$
$$\frac{\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y)}{x_1 - x_2}, \qquad \frac{\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)}{y_1 - y_2}$$

[8]) Von den beiden Ungleichungen

$$(k-n)^2 + 4lm > 0, \qquad kn - lm < 0$$

könnte übrigens die erste unterdrückt werden, da man sie leicht als eine Folge der zweiten erkennt.

bei Annäherung an den Nullpunkt absolut unter jede positive Grenze sinken, so sind die zwei erwähnten Integralkurven eindeutig und teilen also die Umgebung des Nullpunktes in vier Quadranten. Durch jeden vom Nullpunkt verschiedenen Punkt seiner Umgebung geht genau eine Integralkurve; aber außer den zwei erwähnten kommt keine an den Nullpunkt heran.

Fälle IV und V.

$$(k-n)^2+4lm<0.$$

Hier ist gewiß $l \neq 0$, so daß man $l=1$ annehmen kann. Dann ist die quadratische Form

$$l\xi^2+(k-n)\xi\eta-m\eta^2$$

positiv definit. Man kann daher β_1, β_2 so wählen, daß

$$2l\beta_2+(k-n)\beta_1=0, \qquad \beta_1 \neq 0,$$
$$l\beta_2^2+(k-n)\beta_1\beta_2-m\beta_1^2=l$$

ist. Wählt man dann noch $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, so erhält man:

$$\varkappa=l\beta_2-n\beta_1=-\frac{k+n}{2}\beta_1,$$
$$\lambda=l=1,$$
$$\mu=-l=-1,$$
$$\nu=-(k\beta_1+l\beta_2)=-\frac{k+n}{2}\beta_1=\varkappa.$$

Die transformierte Differentialgleichung (2) lautet also:

(4) $$XdX+YdY+\varkappa(XdY-YdX)+FdY-\Phi dX=0,$$

und zwar ist $\varkappa \neq 0$ oder $=0$, je nachdem $k+n \neq 0$ oder $=0$ ist. Somit ergibt sich aus den Sätzen 4 und 5 der

Satz 8. *Bei der Differentialgleichung*

$$[kx+ly+f(x,y)]dy=[mx+ny+\varphi(x,y)]dx,$$

wobei

$$(k-n)^2+4lm<0,$$

seien die Funktionen $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes (diesen mitgerechnet) stetig, und es sei

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}=0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\varphi(x,y)}{|x|+|y|}=0.$$

Dann geht durch jeden in genügender Nähe des Nullpunkts gelegenen, aber vom Nullpunkt verschiedenen Punkt x_0, y_0 mindestens eine Integralkurve, und all diese Integralkurven winden sich, wenn $k+n \neq 0$ ist, unendlich oft um den Nullpunkt und haben ihn zum asymptotischen Punkt.

Wenn dagegen $k+n=0$ ist, verhält es sich zwar im allgemeinen ebenso; ausnahmsweise kann aber auch der Fall eintreten, daß die Integralkurven alle oder zum Teil geschlossen sind und den Nullpunkt im Innern enthalten. Die nichtgeschlossenen winden sich in diesem Fall unendlich oft um den Nullpunkt und haben innen und außen geschlossene Integralkurven zu asymptotischen Linien[9]*, eventuell auch innen den Nullpunkt zum asymptotischen Punkt.*

Wenn $k+n=0$, also $\varkappa=0$, so ist die transformierte Gleichung (4) die folgende:

$$X\,dX+Y\,dY+F\,dY-\Phi\,dX=0, \tag{5}$$

und da hier $\lambda=-\mu=1$, $\varkappa=\nu=0$ ist, so lautet die Identität (3):

$$X\,F+Y\,\Phi=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)[(kx+ly)\varphi-(mx+ny)f].$$

Wenn dieser Ausdruck außerhalb des Nullpunkts nirgends verschwindet, hat die Differentialgleichung nach Satz 6 keine geschlossenen Integralkurven; also tritt nicht der in Satz 8 erwähnte Ausnahmefall ein, und es ergibt sich

Satz 9. *Wenn bei der Differentialgleichung des Satzes 8 $k+n=0$ ist, so liegt der dort erwähnte ausnahmsweise Fall gewiß nicht vor, falls*

$$(kx+ly)\varphi(x,y)-(mx+ny)f(x,y)\neq 0$$

außerhalb des Nullpunkts ist. Dann gibt es also keine geschlossenen Integralkurven.

§ 8.

Nachträglicher Beweis eines früher benutzten Hilfssatzes.

Der in § 5 gebrauchte Hilfssatz kann folgendermaßen formuliert werden:

Hilfssatz. *Wenn die Funktionenfolge $r_1(\omega)$, $r_2(\omega)$, $r_3(\omega)$, ... im Intervall $a\leqq\omega\leqq b$ gleichmäßig beschränkte Differenzenquotienten hat, so daß*

$$|r_\nu(\omega')-r_\nu\omega'')|\leqq G|\omega'-\omega''|, \tag{1}$$

wo G eine positive Konstante ist, und wenn sie gegen eine Grenzfunktion

$$\lim_{\nu\to\infty} r_\nu(\omega)=R(\omega) \tag{2}$$

konvergiert, so ist $R(\omega)$ ebenso wie alle $r_\nu(\omega)$ stetig, und die Gleichung (2) gilt im ganzen Intervall $a\leqq\omega\leqq b$ gleichmäßig.

[9] *Außen* natürlich nur, sofern sie in einem gewissen beschränkten Bereich bleiben.

Beweis. Die Stetigkeit von $r_\nu(\omega)$ ist eine unmittelbare Folge von (1). Sind nun ω', ω'' irgend zwei Werte des Intervalles $a \leqq \omega \leqq b$, so kann man, wie klein auch die positive Zahl ε sei, den Index ν so wählen, daß

$$|r_\nu(\omega') - R(\omega')| < \varepsilon,$$
$$|r_\nu(\omega'') - R(\omega'')| < \varepsilon.$$

Daraus folgt aber:

$$|R(\omega') - R(\omega'')| < |r_\nu(\omega') - r_\nu(\omega'')| + 2\varepsilon \leqq G|\omega' - \omega''| + 2\varepsilon.$$

Da ε beliebig klein sein darf, ist also auch

$$|R(\omega') - R(\omega'')| \leqq G|\omega' - \omega''|,$$

woraus sogleich die Stetigkeit von $R(\omega)$ folgt.

Nun schalte man in das Intervall (a, b) gewisse Zwischenwerte ω_λ ein:

$$a = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{n-1} < \omega_n = b,$$

und zwar so eng, daß nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε

$$\omega_{\lambda+1} - \omega_\lambda < \frac{\varepsilon}{3G} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ist. Dann kann man einen Index ν_0 so wählen, daß für $\nu \geqq \nu_0$

$$|r_\nu(\omega_\lambda) - R(\omega_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ist jetzt ω irgendein Wert des Intervalles $a \leqq \omega \leqq b$, so ist für einen gewissen Index λ auch $\omega_\lambda \leqq \omega \leqq \omega_{\lambda+1}$, und folglich für $\nu \geqq \nu_0$:

$$\begin{aligned}|r_\nu(\omega) - R(\omega)| &= |r_\nu(\omega) - r_\nu(\omega_\lambda) + R(\omega_\lambda) - R(\omega) + r_\nu(\omega_\lambda) - R(\omega_\lambda)| \\ &\leqq |r_\nu(\omega) - r_\nu(\omega_\lambda)| + |R(\omega_\lambda) - R(\omega)| + |r_\nu(\omega_\lambda) - R(\omega_\lambda)| \\ &< G|\omega - \omega_\lambda| + G|\omega - \omega_\lambda| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leqq 2G(\omega_{\lambda+1} - \omega_\lambda) + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist aber die Gleichmäßigkeit der Gleichung (2) bewiesen.

(Eingegangen am 20. April 1922)

Über eine Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren.

Von

Josef Lense in Wien.

§ 1.

Herr Lichtenstein hat in mehreren groß angelegten, in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlungen [1]) das alte Problem der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen neu aufgegriffen und darin unter andern den von H. Poincaré postulierten allgemeinen Satz über die Existenz von Verzweigungsfiguren bewiesen. Die sich speziell auf ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren beziehenden Sätze sind von A. Liapounoff in einer Reihe grundlegender Arbeiten (1903 bis 1918) vorher erledigt worden. Im Zentrum der Lichtensteinschen Arbeiten steht die Diskussion einer nicht linearen Integro-Differentialgleichung, die mit einer linearen Integralgleichung zweiter Art vom Fredholmschen Typus zusammenhängt; ihr Kern läßt sich durch eine passende Variablentransformation in einen symmetrischen verwandeln. Vorausgesetzt ist dabei konstante Dichte in der Flüssigkeitsmasse. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man bei heterogenen Gleichgewichtsfiguren zu ähnlichen Ergebnissen kommt, wenn gewisse Annahmen über die Dichteverteilung gemacht werden. Im Fall der Kugel führt die Integralgleichung, die der vorhin erwähnten linearen Integralgleichung bei homogenen Figuren entspricht, auf die Clairautsche Differentialgleichung. Das zuletzt genannte Ergebnis hat zuerst Liapounoff angegeben. In einer im Jahre 1903 veröffentlichten Abhandlung skizziert er ein Verfahren, wodurch das Problem heterogener Gleichgewichtsfiguren

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Erste Abhandlung: Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze. Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 229—284; 3 (1919), S. 172—174. Zweite Abhandlung: Stabilitätsbetrachtungen. Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 126—231.

in der Nähe einer Kugel vollständig erledigt wird. Diese Arbeit war der Ausgangspunkt aller seiner späteren Untersuchungen.

Wir denken uns eine mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems rotierende heterogene Gleichgewichtsfigur T und nehmen an, daß die Niveauflächen in T eine Schar ineinandergeschachtelter analytischer und regulärer Flächen darstellen, die sich im Sinne der Analysis situs wie eine Kugel verhalten. Die innerste Niveaufläche reduziert sich auf einen Punkt. Nach bekannten Sätzen ist die Dichte längs der Niveauflächen konstant, ändert sich dagegen im allgemeinen von Niveaufläche zu Niveaufläche. Ist also die Schar der Niveauflächen durch $\lambda = \text{konst.}$ gegeben, so ist die Dichte ϱ nur eine Funktion von λ. Für jede Niveaufläche gilt die Gleichung

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C. \tag{1}$$

Dabei ist V das Newtonsche Potential der Flüssigkeitsmasse, C eine von der betreffenden Niveaufläche abhängige Konstante. V wird geliefert durch die Formel

$$V = \varkappa \int \frac{\varrho' d\tau'}{D} \tag{2}$$

($\varkappa$ = Gravitationskonstante, D = Entfernung Integrationspunkt $P' \rightarrow$ Aufpunkt P, $d\tau'$ = Volumelement).

Der Akzent soll sich immer auf den Integrationspunkt beziehen.

Wir tragen auf der äußeren Normalen jeder Niveaufläche eine von Punkt und Niveaufläche abhängige kleine Strecke ζ auf, wodurch eine neue Schar von Flächen entsteht. Gefragt wird, wie dieses ζ als Funktion des Ortes zu wählen sei, daß die neue Flächenschar die Niveauflächen einer Gleichgewichtsfigur bilde, die zu etwas geänderten Werten der Winkelgeschwindigkeit und Dichte gehört. Im folgenden handelt es sich darum, die zu diesem Problem gehörige Integralgleichung, d. h. die Glieder niedrigster Ordnung der Integro-Differentialgleichung des Problems, aufzustellen. Der Leser kann sich die vollständige Gleichung an der Hand der zweiten Lichtensteinschen Abhandlung[1]) ohne wesentliche Schwierigkeiten selbst rekonstruieren.

Um die gesuchte Integralgleichung zu erhalten, haben wir die erste Variation von (1) zu bilden, also

$$\delta V + \delta \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \delta C, \tag{3}$$

wobei nach (2)

$$\delta V = \varkappa \int_T \frac{\delta\varrho' \cdot d\tau'}{D} + \varkappa \int_{\delta T} \frac{\varrho' d\tau'}{D} - \varkappa \int_T \frac{\varrho' \cdot \delta D \cdot d\tau'}{D^2}. \tag{4}$$

Das Zeichen T, bzw. δT bei den Integralen bedeutet, das betreffende Integral ist über die ursprüngliche Figur T, bzw. ihren Zuwachs δT zu erstrecken. Bezeichnen wir die Oberfläche von T mit O, die äußere Normalenrichtung einer Niveaufläche mit n, so wird

$$(5) \qquad \delta V = \varkappa \int_T \frac{\delta \varrho' \cdot d\tau'}{D} + \varkappa \varrho_0 \int_O \frac{\zeta_0' \, d\sigma_0'}{D} - \varkappa \zeta \int_T \frac{\varrho' \cos(nD)\, d\tau'}{D^2}.$$

Der Index 0 soll dabei andeuten, daß die betreffenden Funktionen für Punkte der Oberfläche O zu bilden sind; $d\sigma_0'$ ist das Oberflächenelement. Die Variation des Potentials der Fliehkraft in (3) liefert, wenn wir $x^2 + y^2 = R^2$ setzen,

$$(6) \qquad \delta \frac{\omega^2 R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \delta \omega^2 + \omega^2 R \, \delta R = \frac{1}{2} R^2 \delta \omega^2 + \omega^2 R \zeta \cos(Rn).$$

Die Beschleunigung der Schwere ist gegeben durch

$$(7) \qquad g = -\frac{\partial}{\partial n}\left(V + \frac{1}{2}\omega^2 R^2\right) = \varkappa \int_T \frac{\varrho' \cos(nD)\, d\tau'}{D^2} - \omega^2 R \cos(Rn),$$

daher wird aus (3) schließlich die Gleichung

$$(8) \qquad -g\zeta + \varkappa \varrho_0 \int_O \frac{\zeta_0' d\sigma_0'}{D} + \varkappa \int_T \frac{\delta \varrho' \cdot d\tau'}{D} + \frac{1}{2} R^2 \delta \omega^2 = \delta C.$$

Sie gilt für jede Niveaufläche und stellt die gesuchte Beziehung vor. Wir nehmen an, daß g überall, außer auf der innersten Niveaufläche (dem isolierten „Niveaupunkte"), > 0 ist, und machen jetzt die Annahme, daß längs der deformierten Niveaufläche die Dichte ϱ denselben Wert haben soll wie längs der ursprünglichen, setzen also

$$\delta \varrho = -\frac{d\varrho}{dn} \cdot \zeta.$$

Dadurch entsteht für ζ eine lineare Integralgleichung zweiter Art mit dem Kern

$$K = \frac{1}{g}\left(\frac{d\varrho}{dn}\right)' \frac{1}{D_{PP'}},$$

freilich modifiziert durch das zweite Glied auf der linken Seite von (8). Die innerste Niveaufläche, die sich eventuell auf einen Punkt reduziert, erheischt eine Sonderbehandlung.

§ 2.

Gleichung (8) soll jetzt auf eine geschichtete Kugel vom Radius a angewendet werden. Wir beschränken uns auch hier wieder darauf, die Glieder niedrigster Ordnung zu betrachten. Die Polarkoordinaten des Aufpunktes seien r, ϑ, φ, die des Integrationspunktes r', ϑ', φ', der Mittelpunkt liege im Ursprung. Die Dichte ϱ ist eine Funktion von r, der Winkel zwischen r und r' werde mit γ bezeichnet. Führen wir noch die sogenannten zonalen Kugelfunktionen oder Legendreschen Polynome P_n ein, so gelten die Formeln:

$$g = \frac{4\pi\varkappa}{r^2}\int_0^r \varrho' r'^2 dr', \tag{9}$$

$$\frac{1}{D_{PP'}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma) \quad \text{für} \quad r' < r,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\gamma) \quad \text{für} \quad r' > r.$$

Für ζ versuchen wir den Ansatz

$$\zeta = -\frac{2}{3}\alpha r P_2(\cos\vartheta), \tag{10}$$

wo α eine Funktion von r ist. Unter Verwendung der Formeln (9) und der bekannten Beziehung

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, P_n(\cos\vartheta')\sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi' = \frac{4\pi}{n+1} P_n(\cos\vartheta) \tag{11}$$

erhalten wir

$$\int_0^{\sigma} \frac{\zeta_0' d\sigma'}{D} = -\frac{8\pi}{15}\alpha_0 r^2, \tag{12}$$

$$\int_T \frac{\delta\varrho' \cdot dr'}{D} = \frac{8\pi}{15 r^3}\int_0^r \alpha' r'^5 d\varrho' + \frac{8\pi r^2}{15}\int_r \alpha' d\varrho'$$

$$= \frac{8\pi}{15}\alpha_0\varrho_0 r^2 - \frac{8\pi}{15 r^3}\int_0^r \varrho' d(\alpha' r'^5) - \frac{8\pi r^2}{15}\int_r^a \varrho' d\alpha'.$$

Für die Fliehkraft ergibt sich, da im Falle der Kugel $\omega = 0$ ist und man daher statt $\delta\omega^2$ einfach ω^2 schreiben wird,

$$\delta\frac{\omega^2 R^2}{2} = \frac{1}{3}\omega^2 r^2 [1 - P_2(\cos\vartheta)]. \tag{13}$$

Setzt man (9), (10), (12), (13) in (8) ein und vergleicht die Koeffizienten von $P_2(\cos\vartheta)$ sowie die davon unabhängigen Glieder, so kommt

$$\delta C = \frac{1}{3}\omega^2 r^3, \tag{14}$$

$$5\alpha r^2 \int_0^r \varrho' r'^2 dr' - \int_0^r \varrho' d(\alpha' r'^5) - \int_r^a \varrho' d\alpha' - \frac{5\omega^2 r^5}{8\pi\varkappa} = 0.$$

Die letzte Gleichung ist aber bekanntlich eine Form, in die man die Clairautsche Differentialgleichung bringen kann [2]).

---

[2]) Vgl. z. B. F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, Paris 1891, 2, S. 213.

(Eingegangen am 8. Juni 1922.)

Über die Lösungen der Riemannschen Funktionalgleichung.

Von

E. Hecke in Hamburg.

§ 1.

Herr Hamburger[1]) hat kürzlich folgenden überraschenden Satz bewiesen:

Es sei $f(s)$ eine in der Ebene der komplexen Variablen s definierte eindeutige analytische Funktion mit den vier Eigenschaften:

a) $f(s)$ sei im Endlichen bis auf endlich viele Pole beliebiger Ordnung regulär,

b) es gebe zwei Konstanten r und γ, so daß für jedes endliche s mit $|s| \geqq r$ die Ungleichung gilt:

$$|f(s)| \leqq e^{|s|^\gamma},$$

c) für $\sigma = \Re(s) > 1$ sei $f(s)$ in eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

entwickelbar,

d) auch die Funktion

$$g(1-s) = 2f(s)(2\pi)^{-s} \cos\frac{\pi s}{2}\, \Gamma(s)$$

sei in eine Dirichletsche Reihe entwickelbar,

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

[1]) Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. 1. Mitteilung. Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 240—254.

welche irgendwo, etwa auf den Graden $\sigma = \Re(s) = \beta$ $(\beta > 0)$, absolut konvergiere;

dann ist $g(s) = f(s)$ und diese Funktion bis auf einen konstanten Faktor gleich der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$.

Für diesen Hamburgerschen Satz möchte ich hier einen wesentlich kürzeren, sehr primitiven Beweis mitteilen, welcher die §§ 1 und 2 der zitierten Arbeit völlig entbehrlich macht. Es ist natürlich nicht schwer, an einem vorhandenen Beweise Vereinfachungen anzubringen, doch lassen sich mit der unten dargelegten Methode auch andere Probleme behandeln, die nicht in der Richtung der Untersuchungen von Herrn Hamburger liegen; aus diesem Grunde teile ich den modifizierten Beweis mit[2]).

Der Gedanke ist einfach der, vermöge der bekannten Integralformeln aus der Theorie der Dirichletschen Reihen die Koeffizienten b_n durch ein Integral über $g(s)$ auszudrücken und dann den Integrationsweg in dasjenige Gebiet der s-Ebene zu verschieben, in welchem für $f(s)$ die Dirichletsche Reihenentwicklung gilt. Dadurch ergibt sich eine — auch bei Herrn Hamburger auftretende — Beziehung zwischen der Summe der ersten x Koeffizienten b_n und der Gesamtheit der a_n, aus der wie dort in wenigen Zeilen die Behauptung folgt. Um absolut konvergente Integrale zu haben, gehen wir von den ersten Cesàro-Mitteln der Folge b_n aus.

Zur Abkürzung schreiben wir für reelles a

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \ldots ds = \int_{a} \ldots ds .$$

Bekanntlich ist, wenn

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \tag{2}$$

für $\sigma = \beta$ $(\beta > 0)$ absolut konvergiert, für jedes positive x

$$B(x) = \sum_{n \leqq x} b_n (x - n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{x^{s+1} g(s)}{s(s+1)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\beta} \frac{x^{2-s} g(1-s)\, ds}{(s-1)(s-2)} .$$

Statt über die Gerade $\Re(s) = 1 - \beta$ kann nun dieses Integral auch über eine beliebige Vertikale $\Re(s) = \sigma_0$ erstreckt werden, wenn $1 - \beta \leqq \sigma_0 \leqq 1 + \frac{1}{4}$ und auf dieser Geraden keiner der endlich vielen Pole des Integranden liegt, und wenn man die Residuen berücksichtigt. Denn es ist für ins Unendliche wachsende Ordinate t von $s = \sigma + it$

---

[2]) Während des Druckes dieser Note teilt mir Herr Hamburger mit, daß er dieselbe Vereinfachung gefunden hat. Seine Arbeit ist eben in den Sitz.-Ber. der Bayr. Akad. der Wiss. (1922) erschienen.

$$g(1-s)=O(1) \quad \text{für} \quad \sigma=1-\beta \text{ wegen (2)}$$

$$g(1-s)=O(|t|^{\frac{1}{4}}) \quad \text{für} \quad \sigma=\frac{5}{4} \text{ wegen c), d).}$$

Also ist wegen a), b) nach Phragmén-Lindelöf gleichmäßig in σ

$$g(1-s)=O(|t|^{\frac{1}{4}}) \quad \text{für} \quad 1-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}.$$

Mithin ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\beta} \frac{x^{2-s}g(1-s)\,ds}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{4}} \frac{x^{2-s}g(1-s)}{(s-1)(s-2)}\,ds + R(x).$$

Hier bedeutet $R(x)$ die Residuensumme des Integranden im Streifen $-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$, also eine endliche Summe von Gliedern

$$x^a(\log x)^b,$$

d. h. eine für alle $x>0$ beliebig oft stetig differentiierbare Funktion. Tragen wir dann für $g(1-s)$ den Ausdruck (1) mit der Reihe für $f(s)$ ein, so liefert die erlaubte Vertauschung von Summation und Integration

$$B(x)=\frac{1}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^2 \int_{\frac{5}{4}} \frac{(2\pi n x)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)}\,ds + R(x). \tag{3}$$

Für positives y ist nun

$$\int_{\frac{5}{4}} \frac{y^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)}\,ds = \int_{\frac{5}{4}} y^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s-2)\,ds$$

$$= -\frac{1}{y^2}\int_{-\frac{3}{4}} y^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,ds = -2\pi i\,\frac{\cos y - 1}{y^2}. \tag{4}$$

Mithin folgt aus (3), indem man $y=2\pi n x$ setzt,

$$B(x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(2\pi n)^2}(\cos 2\pi n x - 1) + R(x). \tag{5}$$

Diese Summe ist offenbar eine periodische Funktion von x mit der Periode 1, daher

$$B(x+1)-B(x)=R(x+1)-R(x).$$

Der Ausdruck rechts hat stetige Differentialquotienten, während nach Definition, wenn $m=[x]$ gesetzt ist,

$$B(x+1)-B(x)=b_{m+1}(x-m)+\sum_{n=1}^{m} b_n$$

eine stückweise lineare Funktion von x, mit den stückweise, nämlich für

alle nicht ganzen x, stetigen Ableitungen b_{m+1} ist. Also sind alle b_n einander gleich, etwa gleich a,

$$g(s) = a\zeta(s),$$

und da dieses $g(s)$ der Bedingung d) mit $f(s) = a\zeta(s)$ genügt, ist auch $f(s) = g(s) = a\zeta(s)$ und der Satz bewiesen.

Es bleibt also nur noch die Integralformel (4) zu beweisen. Diese Formel, bei Herrn Hamburger nicht ausgesprochen, ist aber ein elementarer Grenzfall der bekannten Mellinschen Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}} u^{-s}\,\Gamma(s)\,ds = e^{-u}, \quad \text{wenn } \Re(u) > 0.$$

Schiebt man nämlich den Integrationsweg über den Pol $s = 0$ mit dem Residuum 1 hinweg, so folgt hieraus

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{3}{4}} u^{-s}\,\Gamma(s)\,ds = e^{-u} - 1.$$

Diese Formel hat aber auch noch einen Sinn für $\Re(u) = 0$ $(u \neq 0)$, weil das Integral dann noch absolut konvergiert; und folglich ist die Formel auch in diesem Fall noch richtig; setzt man daher

$$u = ye^{\pm\frac{i\pi}{2}} = \pm iy \qquad (y > 0),$$

so erhält man in der Tat

$$\int_{-\frac{3}{4}} y^{-s} e^{\mp\frac{i\pi s}{2}}\,\Gamma(s)\,ds = 2\pi i\,(e^{\mp iy} - 1),$$

$$\int_{-\frac{3}{4}} y^{-s}\cos\frac{i\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,ds = 2\pi i(\cos y - 1).$$

§ 2.

Dieser einfache Ansatz, direkt mit dem Integral (4) zu arbeiten, erlaubt nun, für eine große Menge von Fragen der analytischen Zahlentheorie „exakte" Formeln vom Typus der Riemannschen Primzahlformel anzugeben, wie sie neuerdings von Voronoi, vor allem aber von den Herren Hardy und Landau[3]) aufgestellt worden sind. Für das Dirichletsche Teilerproblem und das Ellipsenproblem erhält man so fast ohne Rechnung das Analogon zu (5):

[3]) Hardy: On Dirichlets Divisor Problem. Proc. of the London Math. Soc. (2) **15** (1915), S. 1. — Voronoi: Sur une fonction transcendante ... Annales de l'Ec. Norm. (3) **21**, S. 207. — Landau: Analytische Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen, Sitz.-Ber. der Preuß. Akad. d. Wiss. Math.-phys. Kl. 1915, S. 472 und: Über Dirichlets Teilerproblem, Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-phys. Kl. 1915. S. 326.

1. Sei $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n, also

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}.$$

Man findet dann

$$\frac{1}{2}\sum_{n \leqq x} d(n)(x-n)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}} \frac{x^{s+2}\zeta^2(s)\,ds}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= -\frac{2}{\pi i}\int_{-\frac{1}{2}} \frac{x^{3-s}(2\pi)^{-2s}\cos^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^2(s)\zeta^2(s)\,ds}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

$$= -\frac{x^3}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\int_{\frac{5}{4}} \frac{(e^{\frac{i\pi s}{2}} + e^{-\frac{i\pi s}{2}})^2\Gamma(s)\Gamma(s-3)}{(4\pi^2 n x)^s}\,ds + R(x),$$

wo

$$R(x) = c_0 x^3 + a_0 x^2 + (c_1 x^3 + a_1 x^2)\log x + a_2 x^2 \log^2 x$$

mit konstanten c und a. Das Integral führt auf Besselsche Funktionen. Setzt man

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1\frac{3}{4}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+3)}{u^{2s}}\,ds = F(u), \quad (\Re(u) > 0),$$

so erhält man nach Herrn Mellin[4]) leicht eine Darstellung

$$F(u) = f_1(u) + f_2(u)\log u,$$

wo $f_1(u), f_2(u)$ ganze transzendente Funktionen von u sind; überdies ist[5]), wenn $\Re(u) > 0$,

$$F(u) + u^2 + 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+3)}{u^{2s}}\,ds = u^3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u(e^v+e^{v})}e^{3v}\,dv$$

$$= 2u^3\int_1^{\infty} e^{-2uz}\frac{z(4z^2-3)\,dz}{\sqrt{z^2-1}},$$

wodurch der Zusammenhang mit den Hankelschen Integralen hergestellt ist. Damit ist dann

$$\frac{1}{2}\sum_{n \leqq x} d(n)(x-n)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{(4\pi^2 n)^s}\{F(2\pi i\sqrt{nx}) + F(-2\pi i\sqrt{nx}) - 2F(2\pi\sqrt{nx})\} + R(x).$$

[4]) Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen, Math. Ann. 68 (1910), S. 305–337.

[5]) Ein Beweis findet sich in meiner Arbeit „Analytische Funktionen und algebraische Zahlen" I, Abh. a. d. Math. Seminar der Hamburg. Universität 1 (1922), S. 114.

Diese Formel, welche übrigens, wie sich leicht zeigen läßt, auch noch bei gliedweiser Differentiation ein richtiges Resultat gibt, folgt aus der Hardyschen Formel für $\sum_{n \leqq x} d(n)$ durch zweimalige Integration.

2. Etwas einfacher läßt sich noch das *Ellipsenproblem* behandeln. Sei $Q(m, n)$ eine positiv definite ganzzahlige quadratische Form in m, n mit der Determinante $-D$, und $P(x)$ die Anzahl der Lösungen von

$$Q(m, n) = x$$

in ganzen rationalen m, n. Bekanntlich genügt die Funktion

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n^s}$$

der Funktionalgleichung

$$Z(1-s) = \frac{2}{\sqrt{D}} A^{-2s} \Gamma^2(s) \sin \pi s \, Z(s)$$

mit $$A = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}.$$

Unsere Methode liefert

$$\frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} P(n)(x-n)^2 = \frac{-x^3}{\pi i \sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\infty} P(n) \int_{\frac{1}{4}} \frac{\sin \pi s \, \Gamma(s) \Gamma(s-3)}{(A^2 n x)^s} ds + R_1(x),$$

wo wieder $R_1(x)$ die Residuensumme im Streifen $-\frac{1}{2} \leqq \Re(s) \leqq \frac{5}{4}$ bedeutet. In denselben Bezeichnungen wie oben wird dann

$$\frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} P(n)(x-n)^2 = \frac{2}{\sqrt{D}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{A^6 n^3} \left\{ \frac{F(-iA\sqrt{nx}) - F(+iA\sqrt{nx})}{2i} \right\} + R_1(x).$$

3. Bisher nicht bemerkt scheinen die entsprechenden Formeln für höhere Zahlkörper zu sein. Ich gebe hier als Beispiel den *reellen quadratischen Körper* $k(\sqrt{3})$. Es bezeichne $Q(x)$ die Anzahl der nicht assoziierten Lösungen von $|m^2 - 3n^2| = x$, d. h. die Anzahl der Paare ganzer rationaler m, n, wofür

$$|m^2 - 3n^2| = x \quad \text{und} \quad 1 \leqq m + n\sqrt{3} < 2 + \sqrt{3}.$$

Dann ist

$$\zeta_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(n)}{n^s}$$

die Zetafunktion des Körpers $k(\sqrt{3})$, welche der Funktionalgleichung genügt:

$$\zeta_k(1-s) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)^{-2s} \cos^2 \frac{\pi s}{2} \Gamma^2(s) \zeta_k(s).$$

Für die Mittel der $Q(n)$ ergibt sich wieder

$$\frac{1}{2}\sum_{n\leqq x} Q(n)(x-n)^2 = R_2(x)$$

$$+\frac{3^3}{2\sqrt{3}\pi^6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(n)}{n^3}\left\{F\left(\frac{\pi i}{\sqrt{3}}\sqrt{nx}\right)+F\left(-\frac{\pi i}{\sqrt{3}}\sqrt{n\pi}\right)-2F\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{nx}\right)\right\},$$

wo $R_2(x)$ die zugehörige (endliche) Residuensumme ist.

Analog lassen sich alle Zetafunktionen, auch die mit den Größencharakteren gebildeten, behandeln. Von Interesse sind auch Anwendungen auf $\frac{1}{\zeta(s)}$, wo dann die Mittel der Folge $\mu(n)$ in Verbindung mit den Nullstellen von $\zeta(s)$ gebracht werden.

Hamburg, 5. August 1922.

(Eingegangen am 7. August 1922.)

Über die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen.

Von

Heinrich Tietze in Erlangen.

---

1. Bekanntlich führt die „Parallelverschiebung" von Vektoren längs kleiner geschlossener Kurven in der Nähe eines Punktes eines n-dimensionalen Raumes mit Riemannscher Maßbestimmung auf den Riemann-Christoffelschen Tensor vierter Stufe. Die folgenden Zeilen bezwecken, an Stelle der dabei gewöhnlich verwendeten „unendlich kleinen" geschlossenen Kurven (Parallelogramme) und des damit verbundenen etwas freien Rechnens mit Differentialen ein dem Mathematiker sympathischeres[1]) Rechnen mit endlichen Größen zu setzen, wobei eine an anderer Stelle[2]) angegebene Erweiterung des nach Gauß und Green benannten Integralsatzes für zwei Dimensionen das Hilfsmittel abgibt. Die Betrachtung beschränkt sich nicht auf parallelogrammatische Figuren, welch letztere sich übrigens auch direkt behandeln lassen (Nr. 7).

2. Bezeichnen wir, wie dies bei systematischer Unterscheidung hoch- und tiefstehender Indizes üblich geworden ist, mit $x^1, x^2, \ldots, x^n$ die n Koordinaten (obwohl vielleicht eine durchgängig umgekehrte Verwendung von hoch und tief das bequemere wäre), mit $\Gamma^i_{.ks} = \Gamma^i_{.sk}$ die Christoffelschen Klammergrößen $\left\{ \begin{matrix} ks \\ i \end{matrix} \right\}$ — bzw. die „Komponenten des affinen Zusammenhangs"[3]), — so ist die Parallelverschiebung eines Vektors $(\xi) = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ längs einer Kurve

$$x^s = x^s(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1) \tag{1}$$

bestimmt durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \sum_{ks} \Gamma^i_{.ks}\, \xi^k \frac{dx^s}{dt} = 0\,. \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. Weyl: Raum Zeit Materie, 4. Aufl., S. 103: „Hier atme auf, ..."

[2]) In einem Aufsatz „Über die Gauß-Green-Stokesschen Integralsätze" (erscheint im Journ. für Math.).

[3]) Weyl: Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 383–411; vgl. S. 390.

wobei in den Ortsfunktionen $\Gamma^i_{.ks}(x^1, \ldots, x^n)$ die x^s durch $x^s(t)$ zu ersetzen sind: Sind die Anfangswerte $\xi^i(t_0) = (\xi^i)_0$ gegeben, so bestimmen sich die Funktionen $\xi^i(t)$ d. h. der Vektor (ξ) für jedes t aus (2). Ist (1) eine geschlossene Kurve, d. h. $x^s(t_1) = x^s(t_0)$, so ist die Änderung, die der Vektor (ξ) bei der Herumführung längs (1) erfährt, gegeben durch

$$\Delta\xi^i = \xi^i(t_1) - \xi^i(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\xi^i}{dt}\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{ks} \Gamma^i_{.ks}\xi^k \frac{dx^s}{dt}\,dt.$$

3. Sei $P_0 = (x^s)_0$ ein Punkt und

$$x^s = x^s(u, v) \tag{3}$$

eine durch ihn gelegte zweidimensionale Fläche, wobei $x^s(u_0, v_0) = (x^s)_0$ sei. Durch

$$u = u(t), \qquad v = v(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1) \tag{4}$$

sei eine einfache geschlossene Kurve L auf dieser Fläche dargestellt, deren Anfangs- und Endpunkt P_0 sei $[u(t_0) = u(t_1) = u_0,\ v(t_0) = v(t_1) = v_0]$. Die Vektorkomponenten ξ^i sind dann bei Parallelverschiebung längs L gegeben als Funktionen von t, die sich durch die Anfangswerte $(\xi^i)_0$ und die Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \sum_{ks} \Gamma^i_{.ks}\xi^k \left(\frac{\partial x^s}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x^s}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right) = 0 \tag{5}$$

bestimmen. Setzt man nun

$$\begin{cases} -\sum_{ks} \Gamma^i_{.ks}\xi^k \frac{\partial x^s}{\partial v} = U, \\ +\sum_{ks} \Gamma^i_{.ks}\xi^k \frac{\partial x^s}{\partial u} = V, \end{cases} \tag{6}$$

so wird bei Führung längs L

$$\Delta\xi^i = \int_{t_0}^{t_1} \left(U\frac{dv}{dt} - V\frac{du}{dt}\right)dt. \tag{7}$$

4. Dieses Integral erinnert äußerlich an das beim zweidimensionalen Fall des nach Gauß und Green benannten Integralsatzes auftretende. Es ist aber zu beachten, daß zwar die $\frac{\partial x^s}{\partial u}$, $\frac{\partial x^s}{\partial v}$ und $\Gamma^i_{.ks}$ (darin die $x^s = x^s(u, v)$ gesetzt) *Funktionen des Ortes* (u, v) sind, *nicht* aber die durch (5) nur auf L und abhängig von L bestimmten $\xi^i(t)$ und daher auch *nicht* U und V. Indessen läßt sich der folgende an anderer Stelle[4])

[4]) l. c. [2]), Satz 2.

von mir bewiesene Satz anwenden, — auf die Voraussetzungen im einzelnen über Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw. der auftretenden Funktionen komme ich noch zurück (Nr. 6), — der eine Erweiterung des genannten Gauß-Greenschen Integralsatzes darstellt[5]:

Satz 1. *Sei $\bar{P}_0 = (u_0, v_0)$ ein Punkt der cartesischen u-v-Ebene*[6], *$c^i_{k\sigma}$, $a_{k\sigma}$ gegebene Funktionen von u, v ($i, k = 1, \ldots, n$; $\sigma = 1, 2$). Für alle von $\bar{P}_0$ ausgehenden einfachen geschlossenen in der Gestalt (4) dargestellten Kurven $\bar{L}$ in dieser Ebene, für die es zwei Zahlen Δu, Δv gibt, so daß*

a) *die Kurve $\bar{L}$ ganz im Bereich*

$$|u - u_0| \leqq |\Delta u|, \quad |v - v_0| \leqq |\Delta v| \tag{8}$$

liegt und

b) *die Gesamtlänge von $\bar{L}$ die Größe $\mu(|\Delta u| + |\Delta v|)$ nicht übersteigt (μ eine feste von $\bar{L}$ unabhängige positive Zahl)*

mögen die durch die Anfangswerte $\xi^i = (\xi^i)_0$ und die Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \sum_k \xi^k \left(c^i_{k1} \frac{du}{dt} + c^i_{k2} \frac{dv}{dt} \right) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

bestimmten Funktionen $\xi^i(t)$ gebildet[7] *und*

$$U = \sum_k a_{k1} \xi^k, \qquad V = \sum_k a_{k2} \xi^k$$

gesetzt werden. Bezeichnet dann $\Delta \bar{S}$ den Flächeninhalt des von $\bar{L}$ begrenzten Flächenstückes $\bar{S}$ und $\pm$ das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die im Durchlaufungssinn von $\bar{L}$ genommene Tangente zu der ins Äußere gerichteten Normale so liegt, wie die positive v- zur positiven u-Richtung oder umgekehrt, dann unterscheidet sich das Integral

$$\pm \int_{t_0}^{t_1} \left(U \frac{dv}{dt} - V \frac{du}{dt} \right) dt \tag{10}$$

---

[5]) In gleicher Weise könnte man sich der analogen Erweiterung des Stokesschen Integralsatzes für zweidimensionale Flächenstücke in einem n-dimensionalen Raum bedienen, die jedoch gleichfalls nur eine Anwendung des obigen Satzes 1 ist (vgl. l. c. [2]), § 3).

[6]) Durch Überstreichen werden Punkte, Kurven usw. der u-v-Ebene, wie $\bar{P}$, $\bar{L}$, $\bar{S}$ von den ihnen vermöge (3) entsprechenden P, L, ... des $(x^1, \ldots, x^n)$-Raumes unterschieden.

[7]) Diese Funktionen ξ^i und daher auch U, V sind von $\bar{L}$ abhängig, ihre Werte im einzelnen Kurvenpunkt aber ersichtlich unabhängig von der Parameterdarstellung von $\bar{L}$.

von

$$(11)\quad \Delta\bar{S}\cdot\sum_k'(\xi^k)_0\Big[\frac{\partial a_{k1}}{\partial u}+\frac{\partial a_{k2}}{\partial v}+\sum_h(a_{h1}c^h{}_{k1}+a_{h2}c^h{}_{k2})\Big]_{u=u_0,v=v_0}$$

nur um einen absolut genommen $G(|\Delta u|+|\Delta v|)^3$ nicht übersteigenden Wert, wo G nur von[8]) $\bar{P}_0, \mu, (\xi^1)_0, \ldots, (\xi^n)_0$ *und den gegebenen $c^i{}_{k\sigma}$, $a_{k\sigma}$, nicht aber von $\Delta u, \Delta v$ und der speziellen Kurve $\bar{L}$ abhängt.*

Hierzu sei bemerkt: Wenn wir eine Größe, die absolut $\leqq G(|\Delta u|+|\Delta v|)^\nu = G\,\delta^\nu$ bleibt (G von der genannten Art), eine Größe ν-ter (Kleinheits-)Ordnung nennen und mit $O(\delta^\nu)$ bezeichnen[9]), so ist, wegen

$$\Delta\bar{S}\leqq 4\,|\Delta u\cdot\Delta v|\leqq(|\Delta u|+|\Delta v|)^2=\delta^2,$$

(11) und daher auch das Integral (10) eine Größe zweiter, im allgemeinen[10]) aber nicht höherer Ordnung. Satz 1 gibt also eine Abschätzung von (10), die relativ um so genauer ausfällt, je kleiner (nach allen Seiten) die Ausdehnungen des Bereiches (8) sind, in dem die zusammenschrumpfende Kurve $\bar{L}$ unterzubringen ist, wobei die Voraussetzungen a), b) über $\bar{L}$ nur besagen, daß bei diesem Zusammenschrumpfen die Länge nicht (durch übersteigertes Zick-Zack) ein wachsendes Vielfaches der linearen Abmessungen von (8) werden darf.

Man kann die Beziehungen des Satzes 1 zum Gauß-Greenschen Integralsatz äußerlich noch stärker betonen. Werden nämlich allgemein, wenn F eine Funktion der $n+2$ Variablen $u, v, \xi^1, \ldots, \xi^n$ ist, die Bezeichnungen

$$F(u(t), v(t), \xi^1(t), \ldots, \xi^n(t))=[F(u, v, \xi^1, \ldots, \xi^n)]_{(t)},$$
$$[F(u, v, \xi^1, \ldots, \xi^n)]_{(t_0)}=[F(u, v, \xi^1, \ldots, \xi^n)]_0$$

eingeführt, so möge ein System symbolischer partieller Differentialgleichungen, — der symbolische Charakter durch Einklammern der Derivierten angedeutet, —

$$(12)\quad \begin{cases}\left(\dfrac{\partial\xi^i}{\partial u}\right)=F_1(u, v, \xi^1, \ldots, \xi^n),\\ \left(\dfrac{\partial\xi^i}{\partial v}\right)=F_2(u, v, \xi^1, \ldots, \xi^n),\end{cases}\qquad (i=1, \ldots, n)$$

die Bedeutung haben, daß die Funktionen $\xi^i=\xi^i(t)$ das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\xi^i}{dt}=[F_1(u, v, \xi^1, \ldots, \xi^n)]_{(t)}\frac{du}{dt}+[F_2(u, v, \xi^1, \ldots, \xi^n)]_{(t)}\frac{dv}{dt}$$

---

[8]) Über die Abhängigkeit des G von $\bar{P}_0$ vgl. Nr. 6.

[9]) Über das Symbol $O(g(\delta))$ vgl. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (1916), S. 5.

[10]) Z. B. wenn $\bar{L}$ gleich der Begrenzung des Bereiches (8) und $|\Delta u|=|\Delta v|$ ist.

befriedigen. Dann kann man für (9) schreiben

$$\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u}\right) = \sum_k c^i_{k1}\,\xi^k, \qquad \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial v}\right) = \sum_k c^i_{k2}\,\xi^k,$$

desgleichen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right) = \sum_k \left[\xi^k \frac{\partial a_{k1}}{\partial u} + a_{k1}\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u}\right)\right] = \sum_k \xi^k \left[\frac{\partial a_{k1}}{\partial u} + \sum_h a_{h1}\,c^h_{k1}\right],$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right) = \sum_k \left[\xi^k \frac{\partial a_{k1}}{\partial v} + a_{k1}\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial v}\right)\right] = \sum_k \xi^k \left[\frac{\partial a_{k1}}{\partial v} + \sum_h a_{h1}\,c^h_{k2}\right],$$

nebst zwei analogen Gleichungen für $\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)$, und Satz 1 bekommt die einfache Gestalt:

$$(13) \qquad \pm\int_{t_0}^{t_1}\left(U\frac{dv}{dt} - V\frac{du}{dt}\right)dt = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)\right]_0 \Delta\bar{S} + O(\delta^3).$$

5. Für die Berechnung von (7) liegt nun genau ein Fall wie im Satz 1 vor. Man braucht nur zu setzen

$$(14) \qquad \begin{cases} -a_{k2} = c^i_{k1} = -\sum_s \Gamma^i_{\cdot ks}\frac{\partial x^s}{\partial u}, \\ +a_{k1} = c^i_{k2} = -\sum_s \Gamma^i_{\cdot ks}\frac{\partial x^s}{\partial v} \end{cases}$$

oder symbolisch:

$$\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u}\right) = -\sum_{ks} \Gamma^i_{\cdot ks}\,\xi^k \frac{\partial x^s}{\partial u},$$

$$\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial v}\right) = -\sum_{ks} \Gamma^i_{\cdot ks}\,\xi^k \frac{\partial x^s}{\partial v}.$$

Man erhält:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right) = -\sum_{ks}\left[\xi^k \frac{\partial}{\partial u}\left(\Gamma^i_{\cdot ks}\frac{\partial x^s}{\partial v}\right) + \Gamma^i_{\cdot ks}\frac{\partial x^s}{\partial v}\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u}\right)\right]$$

$$= -\sum_{ks}\xi^k\left[\Gamma^i_{\cdot ks}\frac{\partial^2 x^s}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \Gamma^i_{\cdot ks}}{\partial u}\frac{\partial x^s}{\partial v} - \sum_{hr}\Gamma^i_{\cdot hs}\Gamma^h_{\cdot kr}\frac{\partial x^r}{\partial u}\frac{\partial x^s}{\partial v}\right]$$

$$= -\sum_{ks}\Gamma^i_{\cdot ks}\,\xi^k\frac{\partial^2 x^s}{\partial u\,\partial v} - \sum_{ksr}\left[\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot ks}}{\partial x^r} - \sum_h \Gamma^i_{\cdot hs}\Gamma^h_{\cdot kr}\right]\xi^k\frac{\partial x^r}{\partial u}\frac{\partial x^s}{\partial v}$$

und durch eine analoge Rechnung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = +\sum_{ks}\Gamma^i_{\cdot ks}\,\xi^k\frac{\partial^2 x^s}{\partial v\,\partial u} + \sum_{ksr}\left[\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot ks}}{\partial x^r} - \sum_h \Gamma^i_{\cdot hs}\Gamma^h_{\cdot kr}\right]\xi^k\frac{\partial x^r}{\partial v}\frac{\partial x^s}{\partial u}$$

also

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)=\sum_{ksr}\left[-\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot ks}}{\partial x^r}+\sum_h \Gamma^i_{\cdot hs}\Gamma^h_{\cdot kr}\right]\xi^k\frac{\partial(x^r,x^s)}{\partial(u,v)}$$

$$=\sum_{krs}\left[-\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot kr}}{\partial x^s}+\sum_h \Gamma^i_{\cdot hr}\Gamma^h_{\cdot ks}\right]\xi^k\left(-\frac{\partial(x^r,x^s)}{\partial(u,v)}\right) \tag{15}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{krs}R^i_{\cdot krs}\xi^k\frac{\partial(x^r,x^s)}{\partial(u,v)},$$

wenn wie üblich gesetzt wird:

$$R^i_{\cdot krs}=\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot ks}}{\partial x^r}-\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot kr}}{\partial x^s}+\sum_h(\Gamma^i_{\cdot hr}\Gamma^h_{\cdot ks}-\Gamma^i_{\cdot hs}\Gamma^h_{\cdot kr}).$$

Beschränken wir uns auf ein Durchlaufen von L „im positiven Sinn", — d. h. daß die zu L gehörige Kurve $\bar{L}$ in der u-v-Ebene so durchlaufen wird, wie es dem positiven Vorzeichen in Satz 1 entspricht, — und bezeichnet S das Flächenstück im x^1-x^2-...-x^n-Raum, auf welches $\bar{S}$ vermöge (3) abgebildet wird, und[11])

$$\Delta S_{rs}=\int_{\bar{S}}\frac{\partial(x^r,x^s)}{\partial(u,v)}\,du\,dv=\left[\frac{\partial(x^r,x^s)}{\partial(u,v)}\right]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}\Delta\bar{S}+O(\delta^3)$$

die x^r-x^s-Komponente von S, so erhält man aus (7), (13), (15) den

Satz 2. *Die Änderung des Vektors* (ξ) *bei Parallelverschiebung auf geschlossenem, im positiven Sinn durchlaufenen Weg wird gegeben durch*

$$\Delta\xi^i=-\frac{1}{2}\sum_{krs}R^i_{\cdot krs}((x^1)_0,\ldots,(x^n)_0)(\xi^k)_0\left[\frac{\partial(x^r,x^s)}{\partial(u,v)}\right]_{\substack{u=u_0\\v=v_0}}\cdot\Delta\bar{S}+O(\delta^3).$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{krs}R^i_{\cdot krs}((x^1)_0,\ldots,(x^n)_0)(\xi^k)_0\,\Delta S_{rs}+O(\delta^3),$$

also durch ein die Tensorkomponenten $R^i_{\cdot krs}$ *enthaltendes Hauptglied und ein Zusatzglied von höherer Kleinheitsordnung*[12]).

6. Zu den bereits genannten *Voraussetzungen des Satzes* 1 treten noch die folgenden[13]), mit deren Angabe wir diesen ohnedies überlasteten Satz und die bisherigen Entwicklungen nicht beschweren wollten: In einem

---

[11]) Vgl. l. c. [2]), Formel (61). Bei Abbildung von $\bar{S}$ vermöge (3) auf ein Flächenstück S^* in einem cartesischen x^1-x^2-...-x^n-Raum (Parameterraum) wird ΔS_{rs} der Flächeninhalt der Projektion von S^* auf die x^r-x^s-Ebene.

[12]) Wie früher bedeutet $O(\delta^r)$ eine Größe, die absolut $\leqq(|\Delta u|+|\Delta v|)^r$-mal einer Schranke ist, die von Δu, Δv und L unabhängig ist, also im vorliegenden Falle nur von $P_0, \mu, (\xi^1)_0, \ldots, (\xi^n)_0$ und den Funktionen $\Gamma^i_{ks}, x^s(u,v)$ abhängt.

[13]) Vgl. l. c. [2]), Satz 2 nebst Zusatz 2.

den Punkt $\bar{P}_0$ und alle betrachteten Kurven $\bar{L}$ enthaltenden abgeschlossenen Bereich

$$u^* \leqq u \leqq u^{**}, \quad v^* \leqq v \leqq v^{**} \tag{16}$$

werden die $c^i_{k\sigma}, a_{k\sigma}$ als stetige, differenzierbare Funktionen vorausgesetzt. Die ersten Ableitungen der $a_{k\sigma}$ sollen auch für die Randpunkte von (16) — gegebenenfalls als vordere oder hintere Ableitungen — existieren. Für die Ableitungen $\frac{\partial c^i_{k\sigma}}{\partial u}$ bzw. $\frac{\partial c^i_{k\sigma}}{\partial v}$ genügt die Existenz für alle Punkte aus (16), für die $u^* < u < u^{**}$ bzw. $v^* < v < v^{**}$ ist. Für feste (von u, v unabhängige) positive Zahlen $K, K^*, K_1, K_1^*, K_1^{**}$ sollen in (16) bzw. für beliebige in (16) liegende Punkte (u_1, v_1), (u_2, v_2) die Ungleichungen gelten:

$$|c^i_{k\sigma}| \leqq K; \quad \left|\frac{\partial c^i_{k\sigma}}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial c^i_{k\sigma}}{\partial v}\right| \leqq K^*;$$

$$|a_{k\sigma}| \leqq K_1; \quad \left|\frac{\partial a_{k\sigma}}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial a_{k\sigma}}{\partial v}\right| \leqq K_1^*;$$

$$\left|\left(\frac{\partial a_{k\sigma}}{\partial u}\right)_{\substack{u=u_1\\v=v_1}} - \left(\frac{\partial a_{k\sigma}}{\partial u}\right)_{\substack{u=u_2\\v=v_2}}\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial a_{k\sigma}}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_1\\v=v_1}} - \left(\frac{\partial a_{k\sigma}}{\partial v}\right)_{\substack{u=u_2\\v=v_2}}\right|$$
$$\leqq K_1^{**}(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|).$$

Die die (einfachen geschlossenen) Kurven $\bar{L}$ gemäß (4) darstellenden Funktionen $u(t), v(t)$ sollen stetig und stückweise stetig differenzierbar sein, d. h. es soll eine endliche Anzahl m von Intervallen $\bar{t}_{h-1} \leqq t \leqq \bar{t}_h$ $(1 \leqq h \leqq m,\ \bar{t}_0 = t_0,\ \bar{t}_m = t_1)$ geben, in deren jedem $x'(t)$ und $y'(t)$ existieren (in den Intervallendpunkten als vordere bzw. hintere Ableitung) und — einschließlich der Endpunkte — stetig sind; hierbei $x'^2 + y'^2 + 0$. Es sollen $|u^{**} - u^*|$ und $|v^{**} - v^*|$ so klein sein, daß für jeden in (16) liegenden Bereich (8) und jede allen bisherigen Bedingungen genügende Kurve $\bar{L}$ das System (9) eine für alle t-Werte $t_0 \leqq t \leqq t_1$ bestimmte Lösung (ξ^i) hat (vgl. l. c.[13]). In Satz 1 kann dann für G eine nur von $\mu, K, K^*, K_1, K_1^*, K_1^{**}, (\xi^1)_0, \ldots, (\xi^n)_0$ abhängige Schranke genommen werden, die auch vom Punkt $\bar{P}_0$, *sofern er nur innerhalb* (16) *gewählt wird*, unabhängig ist. (Wählt man aber zuerst $\bar{P}_0$ und dann einen $\bar{P}_0$ enthaltenden Bereich (16) und bestimmt hierzu die Zahlen $K, K^*, K_1, K_1^*, K_1^{**}$, so erscheinen diese und daher auch G von $\bar{P}_0$ abhängig, wie im Text des Satzes 1 angegeben.)

Dementsprechend machen wir bei Satz 2 — außer allen bei Satz 1 über $\bar{L}$ bzw. $u(t), v(t)$ gemachten — die folgenden *Voraussetzungen*: In einem beschränkten abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{A}$ des cartesischen x^1-x^2-....-x^n-Raumes (Parameterraumes) sollen die Funktionen Γ^i_{kl}

stetig und differenzierbar sein und — für feste Zahlen H, H^*, H^{**} — in $\mathfrak{A}$ bzw. für zwei beliebige Punkte $(x^s)_1, (x^s)_2$ in $\mathfrak{A}$ den Ungleichungen genügen:

$$|\Gamma^i_{\cdot ks}| \leqq H, \qquad \left|\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot ks}}{\partial x^r}\right| \leqq H^*,$$

$$\left|\left(\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot ks}}{\partial x^r}\right)_{(x^s)_1} - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{\cdot ks}}{\partial x^r}\right)_{(x^s)_2}\right| \leqq H^{**} \cdot \sum_s |(x^s)_1 - (x^s)_2|.$$

Die Funktionen $x^s(u, v)$ sollen in einem $\overline{P}_0 = (u_0, v_0)$ enthaltenden Bereich (16) zweimal differenzierbar sein und — für feste Zahlen H_1, H_1^*, H_1^{**} — in (16) bzw. für zwei beliebige Punkte $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ in (16) den Ungleichungen genügen:

$$\left|\frac{\partial x^s}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial x^s}{\partial v}\right| \leqq H_1; \quad \left|\frac{\partial^2 x^s}{\partial u^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 x^s}{\partial u\,\partial v}\right|, \left|\frac{\partial^2 x^s}{\partial v^2}\right| \leqq H_1^*;$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2 x^s}{\partial u^2}\right)_{\substack{u=u_1\\v=v_1}} - \left(\frac{\partial^2 x^s}{\partial u^2}\right)_{\substack{u=u_2\\v=v_2}}\right| \leqq H_1^* \,(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|) \tag{17}$$

nebst den zu (17) analogen Ungleichungen für $\frac{\partial^2 x^s}{\partial u\,\partial v}$ und $\frac{\partial^2 x^s}{\partial v^2}$. (Hieraus folgt im besonderen, daß $\frac{\partial^2 x^s}{\partial u\,\partial v}$ stetig und gleich $\frac{\partial^2 x^s}{\partial v\,\partial u}$ ist.) Es soll (3) eine eineindeutige Abbildung von (16) auf eine ganz in $\mathfrak{A}$ liegende Punktmenge sein. Die Funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x^r, x^s)}{\partial(u, v)}$ sollen im Punkt $\overline{P}_0$ nicht alle verschwinden.

7. Wie bereits erwähnt (Nr. 1), wird gewöhnlich der Fall betrachtet, daß der Weg, auf dem der Vektor (ξ) parallel geführt wird, den Umfang eines unendlich kleinen Parallelogramms beschreibt. Bei unserer Betrachtung endlicher Größen entspricht dem, daß $\overline{L}$ ausgehend von $\overline{P}_0 = (u_0, v_0)$ den Umfang eines endlichen in (16) enthaltenen Parallelogramms der u-v-Ebene, etwa

$$u_0 \leqq u \leqq u_0 + \Delta u = u_1, \qquad v_0 \leqq v \leqq v_0 + \Delta v = v_1 \tag{18}$$

beschreibt $(\Delta u, \Delta v > 0)$. Man kann in diesem Sonderfall, wie ich kürzlich in einer Vorlesung angegeben habe, Satz 2 auch ohne Heranziehung von Satz 1 direkt erhalten[14]). Hierzu mögen die Seiten des Rechteckes (18), wie sie bei positivem Umlauf aufeinander folgen, mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet und auf ihnen abwechselnd u und v als Kurvenparameter t genommen werden. $\xi_1^i(u), \xi_2^i(v), \xi_3^i(u), \xi_4^i(v)$ seien die Vektorkomponenten auf den vier Seiten, wobei

$$\xi_1^i(u_0) = (\xi^i)_0, \qquad \xi_1^i(u_1) = \xi_2^i(v_0), \qquad \xi_2^i(v_1) = \xi_3^i(u_1), \qquad \xi_3^i(u_0) = \xi_4^i(v_1)$$

[14]) Übrigens stand mir damals Satz 1 noch nicht zur Verfügung.

und zufolge der Differentialgleichungen (5) — bei Verwendung der Abkürzungen c^i_{k1}, c^i_{k2} wie in Nr. 5 —

$$(19)\quad \begin{cases} \xi^i_{2\lambda+1}(u) - \xi^i_{2\lambda+1}(u_1) = -\int\limits_u^{u_1} \sum\limits_k c^i_{k1}(u, v_\lambda)\, \xi^k_{2\lambda+1}(u)\, du, \\ \xi^i_{2\lambda+2}(v) - \xi^i_{2\lambda+2}(v_1) = -\int\limits_v^{v_1} \sum\limits_k c^i_{k2}(u_{1-\lambda}, v)\, \xi^k_{2\lambda+2}(v)\, dv \end{cases}$$

ist $(\lambda = 0, 1)$. Im besonderen ergibt sich

$$(20)\qquad \Delta\xi^i = \xi^i_4(v_0) - \xi^i_1(u_0) = \Delta_1\xi^i + \Delta_2\xi^i + \Delta_3\xi^i + \Delta_4\xi^i,$$

wenn gesetzt wird

$$(21)\quad \begin{cases} \Delta_{2\lambda+1}\xi^i = (-1)^\lambda(\xi^i_{2\lambda+1}(u_1) - \xi^i_{2\lambda+1}(u_0)) = (-1)^\lambda \int\limits_{u_0}^{u_1} \sum\limits_k c^i_{k1}(u, v_\lambda)\, \xi^k_{2\lambda+1}(\\ \Delta_{2\lambda+2}\xi^i = (-1)^\lambda(\xi^i_{2\lambda+2}(v_1) - \xi^i_{2\lambda+2}(v_0)) = (-1)^\lambda \int\limits_{v_0}^{v_1} \sum\limits_k c^i_{k2}(u_{1-\lambda}, v)\, \xi^k_{2\lambda+ \end{cases}$$

Wir bezeichnen analog wie früher eine Größe mit $O(\delta^\nu)$, wenn ihr absoluter Betrag nicht größer ist als $\delta^\nu = (|\Delta u| + |\Delta v|)^\nu$-mal einer „Schranke G", die nur von den Zahlen $(\xi^i)_0$, den Bereichen $\mathfrak{A}$ und (16) und dem Verhalten der Funktionen $\Gamma^i_{\cdot ks}, x^s(u, v)$ in diesen Bereichen abhängt, hingegen von $\Delta u, \Delta v$ unabhängig ist. Dann erhält man unter Berufung auf die Definition der ξ^i_λ aus Differentialgleichungen und Anfangswerten — unter Beschränkung auf hinlänglich kleine $\Delta u, \Delta v$ — feste (von $\Delta u, \Delta v$ unabhängige) Schranken für die absoluten Beträge der ξ^i_λ, die also, ebenso wie die c^i_{k1}, c^i_{k2} Größen nullter Ordnung sind. Daraus folgt wegen (19) $|\xi^i_{2\lambda+1}(u) - \xi^i_{2\lambda+1}(u_1)|$ bzw. $|\xi^i_{2\lambda+2}(v) - \xi^i_{2\lambda+2}(v_1)| \leqq |u_1 - u|$ bzw. $|v_1 - v|$-mal einer „Schranke G", also $= O(\delta)$. Es sind also (19) und speziell (21) Größen erster Ordnung, und es gilt das gleiche überhaupt allgemein von jeder Differenz $\xi^i_{\lambda_1}(\ldots) - \xi^i_{\lambda_2}(\ldots)$ für irgendwelche (18) genügende Argumentwerte u bzw. v, die in die betreffenden Funktionen $\xi^i_{\lambda_1}, \xi^i_{\lambda_2}$ eingesetzt werden. Daraus folgt, da[15])

$$|c^i_{k1}(u, v_\lambda) - c^i_{k1}(u_0, v_0)| \leqq n(HH_1^* + nH_1^2H^*)\cdot(|u - u_0| + |v_\lambda - v_0|) \leqq n(HH_1^* + nH_1^2H^*)\,\delta$$

also auch von erster Ordnung ist,

---

[15]) Man beachte dabei:

$$|(\Gamma^i_{\cdot kr})_{x^s = x^s(u_1, v_1)} - (\Gamma^i_{\cdot kr})_{x^s = x^s(u_2, v_2)}| \leqq nH_1H^*(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|).$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2\lambda+1}\xi^i &= (-1)^\lambda \int_{u_0}^{u_1} \sum_k \left([c^i_{k1}]_0 (\xi^k)_0 + c^i_{k1}(u, v_\lambda)\,[\xi^k_{2\lambda+1}(u) - \xi^k_1(u_0)]\right.\\ &\quad \left. + [c^i_{k1}(u, v_\lambda) - c^i_{k1}(u_0, v_0)](\xi^k)_0\right) du\\ &= (-1)^\lambda \int_{u_0}^{u_1} \left(\sum_k [c^i_{k1}]_0 (\xi^k)_0 + O(\delta)\right) du\\ &= (-1)^\lambda \sum_k [c^i_{k1}]_0 (\xi^k)_0 \Delta u + O(\delta^2)\end{aligned}$$

und analog

$$\Delta_{2\lambda+2}\xi^i = (-1)^\lambda \sum_k [c^i_{k2}]_0 (\xi^k)_0 \Delta v + O(\delta^2). \tag{22}$$

Ferner ist

$$\xi^i_3(u) - \xi^i_1(u) - \Delta_2 \xi^i = (\xi^i_3(u) - \xi^i_3(u_1)) - (\xi^i_1(u) - \xi^i_1(u_1))$$

$$= -\int_u^{u_1} \sum_k \left([c^i_{k1}(u, v_1) - c^i_{k1}(u, v_0)]\,\xi^k_3(u) + c^i_{k1}(u, v_0)[\xi^k_3(u) - \xi^k_1(u)]\right) du$$

$$= \int_u^{u_1} O(\delta)\, du = O(\delta^2)$$

und

$$) \quad c^i_{k1}(u, v_1) - c^i_{k1}(u, v_0) = \frac{\partial c^i_{k1}(u, v_0 + \vartheta \Delta v)}{\partial v} \Delta v = \left[\frac{\partial c^i_{k1}}{\partial v}\right]_0 \Delta v + O(\delta^2).$$

Aus

$$\begin{aligned}\Delta_1 \xi^i + \Delta_3 \xi^i &= -\int_{u_0}^{u_1} \sum_k \left([c^i_{k1}(u, v_1) - c^i_{k1}(u, v_0)](\xi^k)_0\right.\\ &\quad + [c^i_{k1}]_0 \Delta_2 \xi^k + [c^i_{k1}(u, v_0) - c^i_{k1}(u_0, v_0)]\,\Delta_2 \xi^k\\ &\quad + [c^i_{k1}(u, v_1) - c^i_{k1}(u, v_0)][\xi^k_3(u) - \xi^k_1(u_0)]\\ &\quad \left. + c^i_{k1}(u, v_0)[\xi^k_3(u) - \xi^k_1(u) - \Delta_2 \xi^k]\right) du\end{aligned}$$

erhält man wegen (22) (für $\lambda = 0$) und (23):

$$\Delta_1 \xi^i + \Delta_3 \xi^i = -\int_{u_0}^{u_1} \left[\sum_k \left(\left[\frac{\partial c^i_{k1}}{\partial v}\right]_0 (\xi^k)_0 + [c^i_{k1}]_0 \sum_h [c^k_{h2}]_0 (\xi^h)_0\right) \Delta v + O(\delta^2)\right] du$$

$$= -\sum_k \left(\left[\frac{\partial c^i_{k1}}{\partial v}\right]_0 + \sum_h [c^i_{h1} c^h_{k2}]_0\right)(\xi^k)_0 \Delta u \Delta v + O(\delta^3).$$

Analog ergibt sich

$$\xi^i_4(v) - \xi^i_2(v) - \Delta_3 \xi^i = O(\delta^2),$$

$$\Delta_2 \xi^i + \Delta_4 \xi^i = \sum_k \left(\left[\frac{\partial c^i_{k2}}{\partial u}\right]_0 + \sum_h [c^i_{h2} c^h_{k1}]_0\right)(\xi^k)_0 \Delta u \Delta v + O(\delta^3). \tag{25}$$

Werden für c^i_{k1}, c^i_{k2} ihre Ausdrücke aus (14) und wird $\Delta u \Delta v = \Delta \bar{S}$ gesetzt, so folgt aus (20), (24), (25) Satz 2.

Erlangen, Mathematisches Seminar, im September 1922.

(Eingegangen am 21. September 1922.)

Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt.

Von

Michael Bauer in Budapest.

1: Die Aufgabe der expliziten Bildung von affektlosen ganzzahligen Gleichungen wurde unlängst von den Herren I. Schur[1]) und Ph. Furtwängler[2]) neuerdings behandelt. Sie erzielten das Resultat ohne Anwendung der Idealtheorie. Die allgemeinere Aufgabe: Gleichungen mit rational-ganzen Koeffizienten anzugeben, welche in einem vorgeschriebenen algebraischen Zahlkörper K keinen Affekt besitzen, läßt sich auch ohne Anwendung der Idealtheorie lösen durch die folgende Methode[3]).

2. Es sei d_1 die Diskriminante des Körpers K in Primfaktoren zerlegt

$$d_1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}, \tag{1}$$

es seien ferner

$$p_{r+1},\ p_{r+2},\ p_{r+3};\quad p_{r+2} \geqq n-2 \tag{1*}$$

drei verschiedene Primzahlen, welche d_1 nicht teilen. Bezeichnen wir die gesuchte Gleichung durch

$$F(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad c_i \text{ rational-ganz.} \tag{2}$$

Zunächst soll die Affektlosigkeit von (2) im Körper R der rationalen Zahlen gesichert werden. Die Irreduzibilität wird erreicht, wenn $F(x) \pmod{p_{r+1}^2}$ einem geeignet gewählten Polynom $F_1(x)$ kongruent ist; wenn außerdem noch $F(x) \pmod{p_{r+2}}$ als ein Produkt von $n-2$ verschiedenen Faktoren ersten Grades und einem irreduziblen Polynom $\pmod{p_{r+2}}$ zweiten

---

[1]) Schur, I.: Beispiele von Gleichungen ohne Affekt, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung 29 (1920), S. 145–150.

[2]) Furtwängler, Ph.: Über Kriterien für irreduzible und für primitive Gleichungen und über die Aufstellung affektfreier Gleichungen, Math. Annalen 85 (1922), S. 34–40.

[3]) Eine Lösung der Aufgabe war mir schon vor längerer Zeit bekannt, nur konnte ich die Anwendung der Idealtheorie nicht vermeiden.

Grades[4]) ausfällt, ferner $F(x) \pmod{p_{r+3}^2}$ einem geeigneten Polynom $F_3(x)$ kongruent ist[5]), wird die Gleichung in R keinen Affekt besitzen. Um die Affektlosigkeit auch im Körper K zu sichern, muß die Galoissche Resolvente von (2) in K irreduzibel bleiben. Das wird eintreten, wie es gleichfalls ohne Anwendung der Idealtheorie beweisbar ist[6]), wenn die Diskriminante d des Körpers, welche durch eine Wurzel von (2) bestimmt wird, relativ prim gegen d_1 ausfällt. Sorgen wir nun dafür, daß $F(x) \pmod{p_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$ als ein Produkt von verschiedenen $(\text{mod } p_i)$ irreduziblen Polynomen ausfallen soll, dann wird die Diskriminante von $F(x)$, a fortiori d gegen d_1 relativ prim, womit die Aufgabe gelöst wird. Die Anzahl der zu erfüllenden Kongruenzen kann unter Umständen vermindert werden; z. B. wenn ein Primfaktor von d_1 eine oberhalb $\frac{n}{2}$ und unterhalb n liegende Primzahl ist.

3. Eine schwierigere Aufgabe ist: sämtliche affektlose Körper — zunächst in R — zu bilden. Aus Untersuchungen von Frobenius kann folgendes entnommen werden. Man bekommt alle Körper, wenn man diejenigen irreduziblen Gleichungen n-ten Grades in Betracht zieht, welche noch den übrigen Forderungen meiner Annalen-Arbeit [**64** (1907), S. 325—327) genügen. Jeder Körper wird auf diese Weise unendlich oft erzeugt. Ob die Methode meiner Arbeit im Journ. f. Math. [**132** (1907), S. 33—35], respektive eine sinngemäße Abänderung derselben, auch sämtliche affektlose Körper liefert, kann ich nicht entscheiden[7]).

---

[4]) Vgl. den Beweis des Dedekindschen Satzes bei I. Schur.

[5]) Vgl. den Satz 3 von Furtwängler.

[6]) Vgl. meine Arbeit, Beweis von einigen bekannten Sätzen über zusammengesetzte Körper ohne Anwendung der Idealtheorie, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung **30** (1921), S. 186—188.

[7]) Hier wird der Körper durch Diskriminantenteiler bestimmt.

(Eingegangen am 15. Dezember 1922.)

Bemerkung zu der Arbeit: Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze, diese Zeitschrift 14, S. 160—168.

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

Von zwei Seiten wurde ich auf Darboux, Théorie des surfaces IV, S. 38 hingewiesen, wonach sich aus weiter ausholenden Untersuchungen die Eigenschaft ergibt. Merkwürdig ist, daß der Koenigssche Satz für die Ableitung der Lieschen F_2, die eines meiner Ziele war (S. 165), bisher noch nicht herangezogen worden ist, wenigstens nicht in den Arbeiten der Lieschen Schule, die mir bekannt geworden sind.

(Eingegangen am 26. Dezember 1922.)